

**Über die Integraldarstellung in konvexen  
nicht kompakten Mengen straffer Masse**

Gerhard Winkler

1977



# Über die Integraldarstellung in konvexen nicht kompakten Mengen straffer Masse

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
des Fachbereichs Mathematik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von  
**Gerhard Winkler**  
aus München

eingereicht am:  
10. Januar 1977



1. Berichterstatter: Professor Dr. H.G. Kellerer

2. Berichterstatter: Professor Dr. J. Batt

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Februar 1977

## Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                               |         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Einleitung und Inhaltsübersicht                                                                                               | Seite 1 |
| §1. Die klassische Situation                                                                                                  | 6       |
| §2. Ein Integraldarstellungssatz für Mengen<br>von Maßen                                                                      | 15      |
| §3. Existenz und Eindeutigkeit der Integraldar-<br>stellung für dem Maß nach metrisierbare<br>Grundräume                      | 40      |
| §4. Die Halbordnung " $\preceq$ " und ihre Beziehung zur<br>Eindeutigkeit der Integraldarstellung bei<br>beliebigem Grundraum | 51      |
| §5. Ein Anwendungsbeispiel                                                                                                    | 63      |
| Invariante und ergodische Maße                                                                                                | 63      |
| Der Satz von de Finetti                                                                                                       | 67      |
| Drei Beispiele aus der Wahrscheinlichkeits-<br>theorie                                                                        | 70      |
| Symbolverzeichnis                                                                                                             | 77      |
| Stichwortverzeichnis                                                                                                          | 79      |
| Literaturverzeichnis                                                                                                          | 82      |



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41552312\\_0039](https://archive.org/details/IA41552312_0039)

## Einleitung und Inhaltsübersicht

In der Vergangenheit wurden verschiedene Integraldarstellungsätze für konvexe kompakte Teilmengen  $K$  eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes bewiesen (vergleiche das Literaturverzeichnis in [CH]). Die vorliegende Arbeit enthält eine Aussage vom Typ des Satzes von Choquet für konvexe, schwach abgeschlossene - also nicht notwendig kompakte - Teilmengen des Kegels der endlichen positiven straffen Maße über einem beliebigen topologischen Grundraum. Ferner werden Bedingungen untersucht, die zur Eindeutigkeit der Integraldarstellung äquivalent sind.

Choquet-Bishop-de Leeuw bewiesen eine Verallgemeinerung des Satzes von Krein-Milman, die heute unter dem Namen "Satz von Choquet" bekannt ist. Sie zeigten, daß zu jedem Element  $x$  aus  $K$  ein normiertes straffes Maß  $p$  existiert, welches in einem gewissen Sinn auf den Extrempunkten von  $K$  konzentriert ist, so daß  $x$  Baryzentrum von  $p$  ist, d.h. daß gilt:

$$(1) \quad x'x = \int_K x' \, dp$$

für alle stetigen Linearformen  $x'$ . Im Anschluß daran entwickelte sich eine umfangreiche Repräsentationstheorie für konvexe kompakte Mengen. Ansätze zur Verallgemeinerung bietet einerseits das Studium schwach vollständiger oder abgeschlossener Kegel, andererseits die Abschwächung der Kompaktheitsforderung. Kürzlich bewies Edgar in [ED] die Gültigkeit der Beziehung (1) für normabgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmengen eines Banachraumes mit der Radon-Nikodym-Eigen-

schaft.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie treten oft Räume auf, deren Elemente endliche signierte straffe Maße sind, d.h. Maße der Gestalt  $\mu - \nu$ , wobei  $\mu$  und  $\nu$  aus dem Kegel  $\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{F})$  der endlichen positiven straffen Maße über einem topologischen Raum  $(Y, \mathcal{F})$  sind. Mit der Norm der Totalvariation sind sie zwar Banachräume, haben aber im allgemeinen nicht die Radon-Nikodym-Eigenschaft. Versieht man die Maße mit der schwachen Topologie, so hat man bei nicht vollständig regulärem Grundraum nicht einmal einen topologischen Vektorraum zur Verfügung, sondern nur noch den Kegel  $\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{F})$ .

Unsere Objekte werden also Teilmengen  $H$  von  $\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{F})$  sein, welche konvex, normbeschränkt und schwach abgeschlossen sind. Zunächst stellt sich die Frage nach einer Darstellungsformel, welche (1) entspricht und für Maße besonders geeignet ist. Folgende Möglichkeit bietet sich an:

Ein Element  $\mu$  von  $H$  wird durch ein Maß  $p$  auf einer geeigneten  $\sigma$ -Algebra über  $H$  repräsentiert - ist also Resultante von  $p$  -, wenn gilt:

$$(2) \quad \mu(f) = \int_H \nu(f) \, dp$$

für alle  $f$  aus einer noch festzulegenden Familie  $\mathcal{A}$  beschränkter Funktionen auf  $Y$ .

In [WZ] beweist von Weizsäcker (2), wobei  $\mathcal{A}$  die Menge beschränkter Funktionen auf  $Y$  ist, welche meßbar sind bezüglich der von den Baireschen Funktionen und einer abzählbaren Familie  $\mathcal{A}_0$  universell meßbarer Funktionen auf  $Y$  erzeugten

$\mathcal{C}$ -Algebra, und  $p$  auf den Extrempunkten von  $H$  konzentriert ist. Dieser Satz ist recht allgemein, wenn jede Borelmeßbare Funktion auf  $Y$  Bairesch ist, wie z.B. bei metrischem Grundraum. Ist das nicht der Fall, so ist  $\mathcal{A}$  "klein". Es ist nicht gewährleistet, daß die Maße zu verschiedenen Familien  $\mathcal{A}_0$  verträglich gewählt werden können. Auch können mit Hilfe der angewandten Beweistechnik keine Eindeutigkeitsaussagen gemacht werden.

Damit sind die zwei Fragestellungen angedeutet, mit denen sich diese Arbeit beschäftigt.

Der Paragraph 1 stellt die unmittelbar benötigten Definitionen und Bezeichnungen aus der Maßtheorie und der Funktionalanalysis bereit. Außerdem wird dort ein Abriß des Teils der klassischen Repräsentationstheorie gegeben, der für das weitere benötigt wird.

Der Paragraph 2 ist dem Beweis der zentralen Aussage dieser Arbeit, nämlich des Integraldarstellungssatzes 2.4 gewidmet. Er gewährleistet eine Integraldarstellung für  $\mu \in H$ , wobei das darstellende Maß auf den Extrempunkten von  $H$  konzentriert ist und (2) für alle beschränkten Borelmeßbaren Funktionen auf  $Y$  gilt. Im Korollar 2.8 wird die Gültigkeit von (2) auf die beschränkten  $\mu$ -meßbaren Funktionen ausgeweitet.

Im Paragraphen 3 wird der Fall untersucht, daß der Grundraum  $Y$  bezüglich  $\mu$  durch metrisierbare kompakte Mengen ausgeschöpft werden kann.  $p$  kann dann zu einem straffen normierten Maß auf

einer Teilmenge der Extrempunkte eingeschränkt werden. Gilt die Bedingung für alle  $\mu \in H$ , so läßt sich leicht der Eindeutigkeitssatz beweisen: Die Integraldarstellung über die Extrempunkte ist genau dann eindeutig, wenn  $H$  ein Simplex ist, d.h. wenn der von  $H \times \{1\}$  in  $\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{T}) \times \mathbb{R}$  erzeugte konvexe Kegel ein Verband in seiner eigenen Ordnung ist. Dieser Satz 3.7 entspricht dem von Choquet angegebenen Eindeutigkeitssatz. Er wird aus dem "individuellen" Eindeutigkeitssatz 3.5 gefolgert, der zu jedem einzelnen  $\mu \in H$  eine Bedingung angibt, die zur Eindeutigkeit der Darstellung äquivalent ist.

Im nächsten Paragraphen werden die Metrisierbarkeitsforderungen wieder fallengelassen und beliebige Grundräume  $(Y, \mathcal{T})$  betrachtet. Auf dem Raum  $\mathcal{M}^R(H)$  derjenigen Maße aus  $\mathcal{M}^+(H)$ , für welche eine Resultante in  $H$  existiert, wird eine Halbordnung " $\leq$ " definiert, welche an die Stelle der von Choquet benutzten Halbordnung " $<$ " tritt.  $p \leq q$  bedeutet, daß " $q$  stärker auf den Extrempunkten von  $H$  konzentriert ist, als  $p$ ". Für eine Integraldarstellung werden also die bezüglich dieser Halbordnung maximalen Maße interessant sein. Zu jedem  $\mu \in H$  wird die Existenz eines normierten maximalen Maßes auf  $H$  nachgewiesen, welches  $\mu$  repräsentiert. Außerdem wird gezeigt, daß die Eindeutigkeitssätze von Paragraph 3 für beliebige Grundräume in der Menge der maximalen Maße gelten.

Im letzten Paragraphen schließlich wird ein Beispiel angegeben, auf das sowohl die Existenz- als auch die Eindeutigkeitssätze angewendet werden können. Die bezüglich einer Familie von kontraktiven (expansiven) Diffusionen invarianten

normierten straffen Maße lassen sich als Integral über die ergodischen darstellen. Ist zum Maß  $\mu$  der Grundraum durch metrisierbare Mengen ausschöpfbar, wird die Darstellung eindeutig.

Ist  $(Y, \mathcal{Y})$  abzählbares Produkt eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{X})$ , und betrachtet man die gegen Koordinatenvertauschungen invarianten Maße aus  $\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{Y})$  - die symmetrischen Maße -, so erweisen sich die ergodischen Maße als die abzählbaren Produkte der normierten Maße aus  $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ . Der Satz über die Integraldarstellung invarianter Maße wird in dieser Situation zum Satz von de Finetti. Mit seiner Hilfe können "Fast-überall Gesetze", welche häufig in der Wahrscheinlichkeitstheorie auftreten, von Produktmaßen auf symmetrische Maße übertragen werden. Die Produktmaße sind aber die Verteilungen von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, die symmetrischen Maße die Verteilungen der symmetrisch abhängigen. Als Beispiele wurden das starke Gesetz der großen Zahlen und der Satz vom iterierten Logarithmus gewählt. Des weiteren wird der zentrale Grenzwertsatz für symmetrische Maße auf den für Produktmaße zurückgeführt.

Herrn Prof. Dr. Kellerer danke ich für einen Hinweis zum Beweis von Satz 2.4, Herrn Prof. Dr. Batt für seine Hilfe bei der Formulierung und Herrn Dr. v. Weizsäcker für verschiedene Anregungen und Gespräche.

## §1. Die klassische Situation

Der erste Abschnitt enthält einige allgemeine Bezeichnungen und Vereinbarungen. Weitere werden im Text eingeführt. Alle Bezeichnungen sind zusammen mit der Stelle ihres ersten Auftretens am Schluß der Arbeit in einem Symbolverzeichnis zusammengestellt.

1.1 Es bedeuten  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^+$  jeweils die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null und der reellen bzw. nichtnegativen reellen Zahlen. Sie sind mit der diskreten bzw. euklidischen Topologie und der Totalordnung " $\leq$ " versehen. Eine Funktion ist eine reellwertige Abbildung.

Es werden ausschließlich reelle Vektorräume  $V$  betrachtet.

Eine Teilmenge  $M$  von  $V$  heißt konvex, wenn für  $\alpha \in (0,1)$  und Elemente  $x$  und  $y$  von  $M$  auch  $(1-\alpha)x + \alpha y$  in  $M$  liegt. Ein Element  $x$  einer konvexen Menge  $M$  heißt Extremalpunkt, wenn für  $y, z \in M$  aus  $x = \frac{1}{2}(y+z)$  schon  $x = y = z$  folgt. Die Menge dieser Punkte wird mit  $\text{Ex}M$  bezeichnet. Sind  $R \subset \mathbb{R}$  und  $M_1, M_2 \subset V$ , so sind  $R \cdot M_1 := \{ax : a \in R; x \in M_1\}$  und  $M_1 + M_2 := \{x+y : x \in M_1; y \in M_2\}$ .

Für eine Menge  $X$  und  $A \subset X$  ist  $\chi_A$  die charakteristische Funktion von  $A$  auf  $X$ ; für eine Funktion  $f$  ist  $f|A$  die Einschränkung und für eine Familie  $\mathcal{F}$  von Funktionen ist  $\mathcal{F}|A := \{f|A : f \in \mathcal{F}\}$ . Für eine Teilmenge  $\mathcal{E}$  der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  ist  $A \cap \mathcal{E} := \{A \cap B : B \in \mathcal{E}\}$  und  ${}^B\mathcal{E}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , welche  $\mathcal{E}$  umfaßt (die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra). Die von der euklidischen Topologie erzeugte  $\sigma$ -Algebra wird mit  $\mathcal{L}_1$  bezeichnet, das Mengensystem  $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} {}^B f^{-1}(\mathcal{L}_1)$  mit

$\mathcal{B}\mathcal{F}$ , und es heißt von  $\mathcal{F}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra oder Initial- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{F}$ .

$(Y, \mathcal{T})$  ist stets ein topologischer Raum. (Auf topologische Begriffe wird nicht eingegangen. Die verwendeten Sätze stehen bei [DU]).  $\mathcal{C}(Y, \mathcal{T})$ ,  $\mathcal{C}_b(Y, \mathcal{T})$  und  $\mathcal{F}(Y, \mathcal{T})$  bezeichnen die Mengen der stetigen, stetigen beschränkten und von unten halbstetigen beschränkten Funktionen auf  $Y$ . Wenn eine Verwechslung der Topologien nicht zu befürchten ist, wird bei diesen und ähnlichen Bezeichnungen die Angabe der Topologie weggelassen, also  $\mathcal{C}(Y)$  usw. geschrieben.

$\mathcal{L}_0(Y)$  ist die (von  $\mathcal{C}(Y)$  erzeugte)  $\sigma$ -Algebra der Baireschen Mengen,  $\mathcal{L}(Y)$  die (von  $\mathcal{F}$  erzeugte)  $\sigma$ -Algebra der Borelschen Mengen von  $Y$ ;  $\mathcal{B}_0(Y)$  und  $\mathcal{B}(Y)$  sind die Mengen derjenigen beschränkten Funktionen  $f$  auf  $Y$ , welche Baire-, bzw. Borelmebar sind, d.h. für die  $f^{-1}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_0(Y)$  bzw.  $f^{-1}(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}(Y)$  ist. Ist  $\mathcal{L}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ , so bezeichnet  $M^+(\mathcal{L})$  die Menge der positiven, beschränkten,  $\sigma$ -additiven Funktionen darauf, der Maße. Für Teilmengen von  $M^+(\mathcal{L})$  wird mit einer tiefgestellten 1 die Menge der normierten Maße, d.h. der  $p \in M^+(\mathcal{L})$  mit  $p(Y) = 1$ , ausgezeichnet, also z.B.  $M_1^+(\mathcal{L})$  geschrieben.  $p \in M^+(\mathcal{L}(Y))$  heißt straff, wenn für jedes  $B \in \mathcal{L}(Y)$  gilt, daß  $p(B) = \sup\{p(K) : K \subset B \text{ kompakt}\}$  ist.  $\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{T})$  ist die Menge dieser Maße. Ist zu  $x \in X$  die Menge  $\{x\} \in \mathcal{L}$ , so ist  $\varepsilon_x \in M_1^+(\mathcal{L})$  definiert durch  $\varepsilon_x(\{x\}) = 1$ .

In der Arbeit werden einige grundlegende Sätze aus der Choquet-schen Theorie der Integraldarstellung benötigt. Sie werden im folgenden zusammengestellt. Ausführlich befassen sich die Bücher von Phelps [PH], Alfsen [AL] und Choquet [CH] damit.

1.2 Wir sprechen in diesem Zusammenhang von der klassischen Situation. Hierunter wollen wir verstehen, daß ein Hausdorff-scher lokalkonvexer Vektorraum  $E$  vorliegt und eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge  $K \subset E$ .

1.3  $\mathcal{S}$  sei der Kegel der konvexen Funktionen aus  $\mathcal{C}(K)$  (d.h. für  $a \in (0,1)$  und  $x, y \in K$  ist  $f(ax+(1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$ ).

$\mathcal{S}$  definiert eine Halbordnung auf  $\mathcal{M}^+(K)$ :

es ist  $p < q$  genau dann, wenn  $\int_K f \, dp \leq \int_K f \, dq$  für jedes  $f \in \mathcal{S}$  ist (vgl. [CH], 26.6).

$x \in E$  heißt Resultante von  $p \in \mathcal{M}^+(K)$ , wenn für jedes  $f \in \mathcal{S}$ , dem topologischen Dualraum von  $E$ , gilt:

$$f(x) = \int_K f \, dp.$$

Man sagt auch,  $p$  repräsentiert  $x$  und schreibt  $x = r(p)$ .

Zu jedem  $p \in \mathcal{M}_1^+(K)$  existiert die Resultante  $r(p)$  und liegt in  $K$  ([CH], 26.3).

1.4  $p < q$  bedeutet, daß die Masse von  $q$  "stärker auf den Extrempunkten konzentriert ist", als die von  $p$  ([CH], 26.6 f).

Insbesondere werden die Punktmassen zum Rand hin "gefeigt".

Es gilt nämlich ([CH], 26.7, 26.8 und [PH], 1.4):

a. Ist  $p < q$ , so ist  $r(p) = r(q)$  und  $p(K) \subset q(K)$ .

b. Für jedes  $p \in \mathcal{M}_1^+(K)$  ist  $\varepsilon_{r(p)} < p$ .

c. Genau dann wird  $x \in K$  nur von  $\varepsilon_x$  repräsentiert, wenn  $x \in \text{Ex}K$ .

Ist  $p$  maximal bezüglich der Halbordnung " $\leq$ ", so ist für jedes  $B \in \mathcal{L}_0(K)$  mit  $B \cap \text{Ex}K = \emptyset$  das Maß  $p(B) = 0$ . Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch, wie ein Gegenbeispiel von Mokobodzki zeigt. Dazu vergleiche man [PH], S.30 und S.72.

1.5 Die Umkehrung wird jedoch richtig, wenn man die Baireschen Mengen durch die "Randmengen" ersetzt.

Zu  $f \in \mathcal{C}(K)$  ist die obere Einhüllende definiert:

$$\text{für } x \in K \text{ sei } \bar{f}(x) := \inf\{g(x) : g \in \mathcal{C}, f \leq g\}.$$

$\bar{f}$  ist konkav - d.h.  $-\bar{f}$  ist konvex -, und von oben halbstetig. Für  $f \in \mathcal{C}$  heißt

$$B_f(K) := \{x \in K : f(x) = \bar{f}(x)\}$$

Randmenge (von  $f$ ). Es ist  $\text{Ex}K = \bigcap_{f \in \mathcal{C}} B_f(K)$  ([CH], 27.2), und es gilt:

$p \in \mathcal{M}^+(K)$  ist genau dann maximal, wenn für jedes  $f \in \mathcal{C}$   $p(K \setminus B_f(K)) = 0$  ist ([CH], 27.4).

1.6 Bei metrisierbarem  $K$  ist  $\text{Ex}K$  eine  $G_\delta$ -Menge (also Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen), und es gibt ein  $f \in \mathcal{C}$  mit  $\text{Ex}K = B_f(K)$  ([CH], 27.3). Also gilt: Ist  $K$  metrisierbar, so ist  $p \in \mathcal{M}^+(K)$  genau dann maximal, wenn  $p(K \setminus \text{Ex}K) = 0$  ist ([CH], 27.5).

### 1.7 Der Integraldarstellungssatz von Choquet

Unter anderem durch diese Eigenschaften gewinnt der folgende Existenzsatz Bedeutung ([CH], 27.6):

Satz: (Choquet-Meyer-Bishop-de Leeuw)

Zu jedem  $x \in K$  gibt es ein maximales  $p \in \mathcal{K}_1^+(K)$ , welches  $x$  repräsentiert. Ist  $K$  metrisierbar, so ist  $ExK \in \mathcal{L}(K)$  und  $p(ExK) = 1$ .

Zwangsläufig stellt sich nun die Frage nach der Eindeutigkeit der Integraldarstellung.

1.8 Die folgenden Begriffe werden in [CH], §10 behandelt.

$M$  sei eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes  $V$ .  $M$  erzeugt den konvexen Kegel  $\mathbb{R}^+M$  (mit  $x$  und  $y$  enthält er  $x+y$  und für  $a \in \mathbb{R}^+$  auch  $ax$ ).  $M$  heißt Basis dieses Kegels, wenn jedes  $y \in \mathbb{R}^+M$  eine eindeutige Darstellung der Form  $ax$  mit  $a \in \mathbb{R}^+$  und  $x \in M$  besitzt; ist  $M$  Basis, so gilt  $\mathbb{R}^+M \cap (-\mathbb{R}^+M) = \{0\}$ . In diesem Fall definiert der Kegel eine Halbordnung " $\prec$ " auf dem linearen Raum  $L := \mathbb{R}^+M - \mathbb{R}^+M$ :

für  $x, y \in L$  ist  $y \prec x$  genau dann, wenn  $x-y \in \mathbb{R}^+M$  ist.

Sie heißt natürliche oder eigene Halbordnung des Kegels, und  $L$  wird damit zu einem geordneten Vektorraum.

Zu  $x, y \in \mathbb{R}^+M$  wird das Ordnungsintervall definiert:

$$[x, y]_{\mathbb{R}^+M} := \{z \in \mathbb{R}^+M : x \prec z \text{ und } z \prec y\}.$$

Ein solches Ordnungsintervall sei stets mit der natürlichen Halbordnung versehen.

$M$  ist insbesondere dann Basis von  $\mathbb{R}^+M$ , wenn es auf einer Hyperebene von  $V$  liegt, welche den Ursprung nicht enthält.

1.9 Der Eindeutigkeitssatz von Loomis

Auf Loomis geht der folgende "individuelle" Eindeutigkeitssatz zurück ([LO]) :

Satz:

Es sei  $K$  in einer abgeschlossenen Hyperebene von  $E$  enthalten, welche den Ursprung nicht trifft. Dann gilt:  
Genau dann gibt es zu  $x \in K$  ein eindeutig bestimmtes maximales Maß in  $\mathcal{M}_1^+(K)$ , welches  $x$  repräsentiert, wenn  $[0, x]_{\mathbb{R}^+K}$  ein Verband ist.

Beweis:

1. Wenn das Ordnungsintervall ein Verband ist, dann hat es die Rieszsche Zerlegungseigenschaft (d.h. zu  $u, u_i, v_j \in [0, x]_{\mathbb{R}^+K}$

mit  $u = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{j=1}^m v_j$  gibt es Elemente  $w_{ij} \in [0, x]_{\mathbb{R}^+K}$ , so

daß  $u_i = \sum_{j=1}^m w_{ij}$  und  $v_j = \sum_{i=1}^n w_{ij}$  gilt). Unter dieser Voraussetzung beweist Meyer in [ME], S.09 die Eindeutigkeit.

2. Andererseits gebe es ein eindeutig bestimmtes maximales Maß  $p$  auf  $K$ , welches  $x$  repräsentiert.

Der Kegel  $\mathcal{M}'(K)$  der maximalen Maße ist ein Verband in der punktweisen Halbordnung " $\leq$ " (vgl. [CH], 27.7). Deshalb ist auch das Ordnungsintervall  $[0, p]_{\leq} := \{q \in \mathcal{M}'(K) : q \leq p\}$  damit ein Verband. Es genügt also, einen Ordnungsisomorphismus - d.h. eine ordnungstreue Bijektion - von  $[0, p]_{\leq}$  auf  $[0, x]_{\mathbb{R}^+K}$  anzugeben.

Die Abbildung

$$r_x : [0, p]_{\leq} \longrightarrow E, q \longmapsto r(q)$$

ist linear. Daraus folgen:

i. die Ordnungstreue: Ist  $q \leq m$ , so ist  $r(m) = r(q) + r(m-q)$ , also  $r(q) \leq r(m)$ . Insbesondere ist  $r_x([0, p]_{\leq}) \subset [0, x]_{\mathbb{R}^+K}$ .

- ii. die Injektivität: Ist  $y \triangleleft x$ , so gibt es  $p_{x-y} \in \mathcal{M}'(K)$  mit  $r(p_{x-y}) = x-y$ . Gäbe es verschiedene Maße  $p_y^1, p_y^2 \in \mathcal{M}'(K)$ , welche  $y$  repräsentieren, so hätten  $p_{x-y} + p_y^i$  für  $i = 1, 2$  das Element  $x$  zur Resultante, im Widerspruch zur Voraussetzung.
- iii.  $r_x([0, p]_{\leq}) = [0, x]_{\mathbb{R}^+K}$ : Ist  $y \triangleleft x$  und sind  $p_y$  und  $p_{x-y}$  darstellende maximale Maße für  $x$  und  $x-y$ , so ist  $r(p_y + p_{x-y}) = x$ , wegen der Eindeutigkeit der Darstellung für  $x$  also  $p = p_y + p_{x-y}$  und deshalb  $p_y \leq p$ .

□

Die Voraussetzung, daß  $K$  in einer abgeschlossenen Hyperebene von  $E$  enthalten ist, welche den Ursprung nicht trifft, kann durch eine geeignete Einbettung vermieden werden.

1.10 Wir betrachten zunächst die allgemeine Situation aus 1.8.  $V \times \mathbb{R}$  ist ein Vektorraum und  $V \times \{1\}$  eine Hyperebene darin, die den Ursprung nicht enthält. Die Abbildung

$$\Phi: V \longrightarrow V \times \mathbb{R}, x \longmapsto (x, 1)$$

bettet  $M$  affin in  $V \times \{1\}$  ein, und  $\Phi M$  ist Basis des Kegels  $\mathbb{R}^+ \Phi M$ .

Wir sagen,  $x \in M$  hat die Verbandseigenschaft, wenn  $[0, (x, 1)]_{\mathbb{R}^+ \Phi M}$  ein Verband ist.

1.11 Ist speziell  $V = E$  und  $M = K$ , so ist  $E \times \mathbb{R}$  in der Produkttopologie lokalkonvex und  $E \times \{1\}$  eine abgeschlossene Hyperebene in diesem Raum.  $\Phi$  ist ein Homöomorphismus, und die zu  $\Phi$  gehörige Bildmaßabbildung von  $\mathcal{M}^+(K)$  nach  $\mathcal{M}^+(\Phi K)$ ,  $p \longmapsto p \cdot \Phi^{-1}$  ist bijektiv und bezüglich " $\triangleleft$ " ordnungstreu. Ferner ist  $x = r(p)$  genau dann, wenn  $\Phi x = r(p \cdot \Phi^{-1})$  ist

( das folgt sofort aus der Tatsache, daß für  $x \in K$  genau dann  $x = r(p)$  gilt, wenn  $f(x) = \int_K f \, dp$  ist für alle stetigen affinen Funktionen  $f$  auf  $K$  (d.h. die Elemente von  $\mathcal{S} \cap (-\mathcal{S})$ ) ( $[AL]$ , (2.13)) und aus den Eigenschaften von  $\Phi$ ).

Damit kann der Eindeutigkeitssatz von Loomis so formuliert werden:

Satz:

Genau dann gibt es zu  $x \in K$  ein eindeutig bestimmtes maximales Maß in  $\mathcal{M}^+(K)$ , welches  $x$  repräsentiert, wenn  $x$  die Verbandseigenschaft hat.

1.12 Die Verbindung zwischen der Verbandseigenschaft und einer "globalen" Eigenschaft stellt das folgende Lemma her:

Lemma:

Ist  $M$  Basis von  $\mathbb{R}^+_M$ , so ist dieser Kegel genau dann ein Verband in seiner eigenen Ordnung, wenn für jedes  $x \in M$  das Ordnungsintervall  $[0, x]_{\mathbb{R}^+_M}$  ein Verband ist.

Beweis:

Es sei letzteres richtig und  $y, z \in \mathbb{R}^+_M \setminus \{0\}$ . Dann gibt es eindeutig  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  und  $t \in M$  mit  $y+z = at$ .  $\frac{1}{a}y$  und  $\frac{1}{a}z$  sind aus  $[0, t]_{\mathbb{R}^+_M}$  und besitzen darin ein Supremum  $s$ .  $as$  erweist sich leicht als Supremum von  $y$  und  $z$  in  $\mathbb{R}^+_M$ . Analoges gilt für das Infimum.

Die Umkehrung ist trivial.

□

### 1.13 Der Eindeutigkeitssatz von Choquet

Der Satz von Loomis verallgemeinert den globalen Eindeutigkeitssatz.

$K$  heißt Simplex, wenn der Kegel  $\mathbb{R}^+ \odot K$  ein Verband in seiner eigenen Ordnung ist.

Wegen Lemma 1.12 ist  $K$  genau dann ein Simplex, wenn jedes  $x \in K$  die Verbandseigenschaft hat. Deswegen folgt aus Satz 1.11:

#### Satz: (Choquet-Meyer)

Genau dann gibt es zu jedem  $x \in K$  ein eindeutig bestimmtes maximales Maß in  $\mathcal{M}_1^+(K)$ , welches  $x$  repräsentiert, wenn  $K$  ein Simplex ist.

## §2. Ein Integraldarstellungssatz für Mengen von Maßen

In diesem Paragraphen wird ein Integraldarstellungssatz für Mengen von Maßen formuliert und bewiesen.

$(Y, \mathcal{T})$  sei ein beliebiger topologischer Raum. Zu einer Funktion  $f \in \mathcal{B}(Y)$  ist  $f'$  das Auswertungsfunktional

$$f' : \mathcal{M}^+(Y) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mu \longmapsto \mu(f) = \int_Y f \, d\mu.$$

Weiter sei  $M$  eine nichtleere Teilmenge von  $\mathcal{M}^+(Y)$ . Auf  $M$  ist die schwache Topologie  $\nu(M, \mathcal{F}(Y))$  erklärt als die größte Topologie, für welche die Auswertungsfunktionale  $f'|_M$  von unten halbstetig sind für jede von unten halbstetige Funktion  $f$  auf  $Y$ . Im folgenden seien Teilmengen von  $\mathcal{M}^+(Y)$  stets mit dieser Topologie versehen.

Bemerkung: Wenn  $(Y, \mathcal{T})$  Hausdorffsch ist, so ist es auch  $\nu(M, \mathcal{F}(Y))$  ([T01], Th. 11.2). Näheres über diese Topologie findet man ebenfalls in [T01].

$M$  heißt beschränkt, wenn  $\sup \{ \nu(Y) : \nu \in M \} < \infty$  ist.

Ist  $\mathcal{M}(M)$  eine  $\sigma$ -Algebra, welche die von den Auswertungsfunktionalen zu den Borelmeßbaren beschränkten Funktionen auf  $M$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra

$$(2.1) \quad \mathcal{M}(M) := \mathcal{B}\{f'|_M : f \in \mathcal{B}(Y)\}$$

umfaßt, so ist für jedes  $f \in \mathcal{B}(Y)$  das Funktional  $f'|_M$  bezüglich  $\mathcal{M}(M)$  meßbar. Ist  $M' \subset M$  beschränkt, dann existieren für jedes endliche Maß  $p$  auf  $\mathcal{M}(M')$  die Integrale

$$\int_{M'} \nu(f) \, dp = \int_{M'} f'(\nu) \, dp.$$

Wir sagen dann,  $p$  repräsentiert  $\mu \in \mathcal{M}^+(Y)$ , wenn gilt

$$(2.2) \quad \mu(f) = \int_M, \nu(f) \, dp \text{ für jedes } f \in \mathcal{B}(Y).$$

$\mu$  heißt dann Resultante von  $p$ , und wir schreiben dafür  $\mu = R(p)$ .

Bemerkung: Die Bedingung (2.2) ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$(2.3) \quad \mu(B) = \int_M, \nu(B) \, dp \text{ für jedes } B \in \mathcal{L}(Y).$$

$M$  sei jetzt konvex und beschränkt. Dafür wird eine Relation " $\preceq$ " auf  $M^+(\mathcal{M}(M))$  eingeführt. Dies geschieht mit Hilfe eines Kegels konvexer Funktionen:

$$(2.4) \quad \check{\mathcal{B}}(M) := \left\{ \bigvee_{i=1}^n (f_i + c_i) \mid M: f_i \in \mathcal{B}(Y); c_i \in \mathbb{R}; i=1, \dots, n; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Für  $p, q \in M^+(\mathcal{M}(M))$  bedeutet  $p \preceq q$ , daß

$$(2.5) \quad p(b) \leq q(b) \text{ für jedes } b \in \check{\mathcal{B}}(M).$$

Zur klassischen Situation aus §1 besteht folgende Beziehung:

Ist  $(Y, \mathcal{F})$  ein kompakter Raum, so ist  $\mathcal{C}(Y)$  versehen mit der

Supremumsnorm ein Banachraum.  $\mathcal{M}(Y) := \mathcal{M}^+(Y) - \mathcal{M}^+(Y)$  ist

nach dem Rieszschen Darstellungssatz ([DS], IV.6.3) der topologische Dualraum dazu. Mit der Initialtopologie

$\mathcal{L}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{C}(Y))$  zu den Auswertungsfunktionalen  $f'$  für  $f \in \mathcal{C}(Y)$

wird  $\mathcal{M}(Y)$  ein Hausdorffscher lokalkonvexer Raum ([DS],

S.418ff). Sie heißt schwache Topologie auf  $\mathcal{M}(Y)$ , und ihre

Einschränkung auf  $\mathcal{M}^+(Y)$  fällt mit der oben eingeführten

schwachen Topologie  $\nu(\mathcal{M}^+(Y), \mathcal{F}(Y))$  zusammen ([TO1], Th.8.1).

Bemerkung: Die schwache Topologie  $\mathcal{C}(\mathcal{K}(Y), \mathcal{C}(Y))$  stimmt im allgemeinen nicht mit der "schwachen Topologie" im Sinne von [DS], S.419 und der übrigen funktionalanalytischen Literatur überein. Dort wird sie "schwach\*-Topologie genannt (siehe [DS], S.462).

Jede schwach abgeschlossene beschränkte Teilmenge  $M \subset \mathcal{K}^+(Y)$  ist in diesem Fall kompakt in  $\mathcal{K}(Y)$ .

Für konvexe, kompakte Teilmengen  $K$  eines lokalkonvexen Raumes  $E$  sind die Begriffe "Repräsentieren" und "Resultante" schon definiert (vergleiche §1). Wir zeigen jetzt, daß die soeben eingeführten Begriffe mit den bereits bekannten zusammenfallen, unter der Voraussetzung, daß  $(Y, \mathcal{F})$  kompakt ist, und die konvexe, schwach abgeschlossene, beschränkte Menge  $H \subset \mathcal{K}^+(Y)$  als konvexe, kompakte Teilmenge des lokalkonvexen Raumes  $\mathcal{K}(Y)$  angesehen wird. Ferner wird gezeigt, daß in diesem Fall die Relation " $\trianglelefteq$ " auf  $\mathcal{K}^+(H, \nu(H, \mathcal{F}(Y)))$  mit der Halbordnung " $\leq$ " übereinstimmt. " $\trianglelefteq$ " ist jedoch beim Umgang mit Maßen handlicher.

Zunächst muß festgestellt werden, daß die Begriffe überhaupt bezüglich  $\mathcal{K}^+(H)$  definiert sind, d.h.  $\mathcal{L}(H, \nu(H, \mathcal{F}(Y))) \supset \mathcal{M}(H)$  ist.

### 2.1 Lemma:

Für  $M \subset \mathcal{K}^+(Y)$  und jedes  $f \in \mathcal{B}(Y)$  ist das Auswertungsfunktional  $f|_M$  meßbar bezüglich  $\mathcal{L}(M, \nu(M, \mathcal{F}(Y)))$ .

Beweis:

1. Bei [BG], §0 findet man das folgende Lemma:

Es sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  abgeschlossen gegen endliche Durchschnittsbildung.  $\mathcal{H}$  sei ein Vektorraum von Funktionen auf  $X$ , so daß gilt:

a.  $\mathcal{H}$  enthält die konstanten Funktionen und die charakteristischen Funktionen aller Elemente von  $\mathcal{E}$ .

b. Ist  $(f_n : n \in \mathbb{N})$  eine aufsteigende Folge nichtnegativer Funktionen aus  $\mathcal{H}$ , so daß  $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  beschränkt ist, so ist  $f \in \mathcal{H}$ .

$\mathcal{H}$  enthält dann alle beschränkten  $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ -meßbaren Funktionen auf  $X$ .

2. Setzt man in 1.  $X := Y$ ,  $\mathcal{E} := \mathcal{T}$  und  $\mathcal{H} := \{f \in \mathcal{B}(Y) : f|_M \text{ M-meßbar}\}$ , so sind die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt:

$\mathcal{T}$  ist abgeschlossen gegen endliche Durchschnittsbildung,  $\mathcal{H}$  enthält die Konstanten und  $\chi_A$  für jedes  $A \in \mathcal{T}$ , denn für eine offene Menge  $A$  ist  $\chi_A$  v.u.h. und damit auch  $\chi_A|_M$ .  $\mathcal{H}$  erfüllt auch die Forderung b. und enthält somit alle beschränkten  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ -meßbaren Funktionen, was zu zeigen war.

□

Nun kann der angekündigte Konsistenzsatz formuliert werden:

## 2.2 Satz:

Es sei  $(Y, \mathcal{T})$  kompakt und  $H \subset \mathcal{M}^+(Y)$  nichtleer, konvex und schwach abgeschlossen mit  $\sup \{\nu(Y) : \nu \in H\} < \infty$ .

a. Für  $\mu \in H$  und  $p \in \mathcal{M}^+(H)$  sind äquivalent:

- i. für alle  $f \in \mathcal{B}(Y)$  ist  $\mu(f) = \int_H \nu(f) \, dp$ , d.h.  $\mu = R(p)$ ;
- ii. für alle  $f \in \mathcal{B}_0(Y)$  ist  $\mu(f) = \int_H \nu(f) \, dp$ ;
- iii. für alle  $f \in \mathcal{C}(Y)$  ist  $\mu(f) = \int_H \nu(f) \, dp$ , d.h.  $\mu = r(p)$ .

b. Auf  $\mathcal{M}^+(H)$  stimmt die Relation " $\prec$ " mit der Choquet-schen Halbordnung " $<$ " überein.

Dem Beweis wird ein Lemma vorangestellt, welches die Menge  $\mathcal{B}_0(Y)$  charakterisiert. Es ist in [BE], Sect. 56 zu finden.

### 2.3 Lemma:

$(Y, \mathcal{T})$  sei kompakt. Dann ist  $\mathcal{B}_0(Y)$  die kleinste Klasse beschränkter Funktionen auf  $Y$ , die  $\mathcal{C}(Y)$  enthält und mit jeder punktweise konvergenten Folge  $(f_n : n \in \mathbb{N})$  mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{y \in Y} |f_n(y)| < \infty \text{ auch deren Limes.}$$

Beweis von Satz 2.2:

a. Nur die Implikationen iii.  $\Rightarrow$  ii. und ii.  $\Rightarrow$  i. sind nicht trivial. Davon folgt die erste sofort aus Lemma 2.3.

Nun sei die Bedingung ii. vorausgesetzt. Um die Gültigkeit von i. nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß durch die Festsetzung

$$\pi : \mathcal{L}(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^+, B \longmapsto \int_H \nu(B) \, d\mu$$

ein straffes Maß auf  $\mathcal{L}(Y)$  erklärt ist. Nach Voraussetzung stimmt nämlich  $\pi$  auf  $\mathcal{L}_0(Y)$  mit  $\mu$  überein - man hat nur in ii. für  $f$  die Funktionen  $\chi_B$  mit  $B \in \mathcal{L}_0(Y)$  einzusetzen. Nach dem Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit eines Bairemaßes zu einem straffen Maß ([BE], Sect. 65) ist dann  $\pi = \mu$  und die Bedingung i. erfüllt.

Da  $Y$  kompakt ist, ist jedes endliche Maß auf  $\mathcal{L}(Y)$  genau dann straff, wenn es  $\tau$ -stetig ist, d.h. wenn für jede aufsteigend filtrierende Familie  $(A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}) \subset \mathcal{T}$  und  $A := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$  gilt, daß  $\pi(A) = \sup \{ \pi(A_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A} \}$  ist ([TO1], P16).

Da die Elemente von  $H$  straff sind, gilt

$$\nu(A) = \sup \{ \nu(A_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A} \} \quad \text{für jedes } \nu \in H,$$

also

$$\chi'_A|_H = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \chi'_{A_\alpha}|_H;$$

überdies sind die  $\chi_{A_\alpha}$  in der punktweisen Halbordnung nach oben filtrierend. Die charakteristischen Funktionen zu den offenen Mengen  $A$  und  $A_\alpha$  sind von unten halbstetig und somit die Funktionale  $\chi'_A$  und  $\chi'_{A_\alpha}$  von unten halbstetig auf  $H$  bezüglich der schwachen Topologie. Weil  $p$  selbst straff ist, gilt:

$$\int_H \chi'_A dp = \sup \{ \int_H \chi'_{A_\alpha} dp : \alpha \in \mathcal{A} \}$$

([T01], P15).

Damit folgt das gewünschte Ergebnis:

$$\pi(A) = \int_H \chi'_A dp = \sup \{ \int_H \chi'_{A_\alpha} dp : \alpha \in \mathcal{A} \} = \sup \{ \pi(A_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A} \}.$$

b. Es seien  $p, q \in \mathcal{M}^+(H)$ . Aus  $p \trianglelefteq q$  folgt  $p < q$  sofort, da  $p < q$  genau dann gilt, wenn

$$p(b) \leq q(b)$$

für jedes  $b$  der Gestalt  $\bigvee_{i=1}^n (l_i + c_i)|_H$ , wobei  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

und  $l_1, \dots, l_n$  stetige lineare Funktionale auf dem Raum  $\mathcal{M}(Y)$ , versehen mit der Topologie  $\mathcal{O}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{C}(Y))$  sind.  $f \in \mathcal{S}(H)$  ist nämlich Limes eines aufsteigend filtrierenden Systems solcher Funktionen bezüglich der Supremumsnorm nach [AL], I.1.3.

Jedes  $l_i$  hat aber die Gestalt  $l_i(\cdot) = \int_Y f_i d\cdot$  mit einem  $f_i \in \mathcal{C}(Y)$ .

Sei umgekehrt  $p < q$ . Zu zeigen ist, daß für jedes  $n$ -Tupel reeller Zahlen  $(c_1, \dots, c_n)$  und jedes  $n$ -Tupel Borelmeßbarer beschränkter Funktionen  $(g_1, \dots, g_n)$  gilt:

$$(*) \int_H (g'_1 + c_1) \vee \dots \vee (g'_n + c_n) \, dp \leq \int_H (g'_1 + c_1) \vee \dots \vee (g'_n + c_n) \, dq.$$

Zunächst wird für ein festes  $n$ -Tupel  $(c_1, \dots, c_n)$  gezeigt, daß  $(*)$  für beschränkte Bairesche Funktionen richtig ist und daraus die Behauptung gefolgert.

1. Nach Voraussetzung gilt  $(*)$  für alle  $n$ -Tupel stetiger Funktionen.

Es seien  $g_2, \dots, g_n \in \mathcal{C}(Y)$  und  $\mathcal{G}_1$  die Menge der Funktionen  $g_1 \in \mathcal{B}(Y)$ , für welche  $(*)$  richtig ist. Der Konvergenzsatz von Lebesgue gewährleistet die Anwendbarkeit von Lemma 2.3 und damit folgt  $\mathcal{B}_0(Y) \subset \mathcal{G}_1$ .

Nun seien  $g_1 \in \mathcal{B}_0(Y)$ ,  $g_3, \dots, g_n \in \mathcal{C}(Y)$  und  $\mathcal{G}_2$  die Menge derjenigen Funktionen  $g_2$ , so daß  $(*)$  erfüllt ist. Wie vorher zeigt sich  $\mathcal{B}_0(Y) \subset \mathcal{G}_2$ .

Durch Wiederholen dieser Argumentation ergibt sich, daß  $(*)$  für alle  $n$ -Tupel beschränkter Bairescher Funktionen gilt.

2. Nach 1.3 und 1.4 besitzen  $p$  und  $q$  (im klassischen Sinne) eine gemeinsame Resultante  $\mu$ . Nach Teil a. des vorliegenden Satzes gilt  $\mu = R(p) = R(q)$ . Weil  $Y$  kompakt ist, gibt es nach [BE], Sect. 68, Th. 1 zu jeder Funktion  $f \in \mathcal{B}(Y)$  eine Funktion  $f_0 \in \mathcal{B}_0(Y)$ , welche  $\mu$ -fast überall gleich  $f$  ist, d.h. es gibt  $N \in \mathcal{L}(Y)$  mit  $\mu(N) = 0$ , so daß  $f(y) = f_0(y)$  für alle  $y \in Y \setminus N$  ist. Also gilt:

$$\int_Y |f - f_0| \, d\mu = 0.$$

Daraus folgt mit (2.2), daß

$$p(\{ \nu \in H: \nu(f) \neq \nu(f_0) \}) = q(\{ \nu \in H: \nu(f) \neq \nu(f_0) \}) = 0$$

ist.

3. Ist (\*) für alle  $n$ -Tupel  $(g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{B}_0(Y)^n$  richtig, so nach 2. auch für alle  $n$ -Tupel aus  $\mathcal{B}(Y)^n$ . Zum Beweis ersetzt man einfach  $g_1$  durch  $g_{i_0}$ .

□

Jetzt wird der Darstellungssatz in einer Grundform formuliert. Eine allgemeinere Version folgt auf Seite 38.

Vorher wird noch ein Begriff aus der Maßtheorie benötigt:

Ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra über der Menge  $X$  und  $p$  ein Maß auf  $\mathcal{M}$ , so wird auf  $\mathcal{P}(X)$  das äußere Maß  $p^*$  definiert:

$$\text{für } C \in \mathcal{P}(X) \text{ ist } p^*(C) := \inf\{p(B) : C \subset B, B \in \mathcal{M}\}.$$

#### 2.4 Satz:

Es sei  $H \subset \mathcal{M}^+(Y)$  nichtleer, konvex und schwach abgeschlossen mit  $\sup\{\nu(Y) : \nu \in H\} < \infty$ .

Dann gibt es zu jedem Element  $\mu \in H$  ein normiertes Maß  $p$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}(H) = \mathcal{B}\{f' : H : f \in \mathcal{B}(Y)\}$  mit  $p^*(\text{Ex}H) = 1$ , welches  $\mu$  repräsentiert, d.h.

$$\mu(f) = \int_H \nu(f) dp \text{ für jedes } f \in \mathcal{B}(Y).$$

erfüllt.

Bemerkung: Die endlichen Maße über  $\mathcal{M}(\text{Ex}H)$  sind genau die Einschränkungen der endlichen Maße über  $\mathcal{M}(H)$  mit  $p^*(\text{Ex}H) = 1$ .

Beweis von Satz 2.4:

I. Zunächst sei zusätzlich vorausgesetzt, daß  $(Y, \tau)$  kompakt ist.

1. Der lineare Raum  $\mathcal{M}(Y, \tau)$  versehen mit der schwachen Topologie ist lokalkonvex;  $H$  ist eine konvexe, kompakte Teilmenge von  $\mathcal{M}(Y, \tau)$  (vgl. S. 17). Zu  $\mu \in H$  gibt es also nach

dem Satz von Choquet ein Maß  $q \in \mathcal{M}_1^+(H)$ , welches  $\mu$  repräsentiert und bezüglich der Halbordnung " $\prec$ " maximal ist. Für  $q$  gilt nach Satz 2.2 die Darstellungsformel (2.2), d.h.

$f'|_H(\mu) = \int_H f'|_H(\nu) dq$  für jedes  $f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{F})$ . Weil mit den Auswertungsfunktionalen  $f'|_H$  zu  $f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{F})$  in dieser Formel nur  $\mathcal{M}(H)$ -meßbare Funktionen auftreten (vgl. (2.1)), gilt sie auch für

$$p := q|_{\mathcal{M}(H)}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß  $p^*(ExH) = 1$  ist, d.h.  $p(A) = 0$  für jedes  $A \in \mathcal{M}(H)$  mit  $A \cap ExH = \emptyset$ .

2. Es sei also ein solches  $A$  vorgegeben. Wegen der Beziehung

$$\mathcal{M}(H) = \bigcup_{\substack{\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(Y, \mathcal{F}) \\ \mathcal{F} \text{ abzählbar}}} \mathcal{B}\{f'|_H : f \in \mathcal{F}\}$$

gibt es eine abzählbare Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(Y, \mathcal{F})$ , so daß  $A$  in der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}\{f'|_H : f \in \mathcal{F}\}$  liegt. Zu  $\mu$  und  $\mathcal{F}$  gibt es eine Folge von paarweise disjunkten Kompakta  $(K_n : n \in \mathbb{N})$ , so daß für  $Y_1 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  gilt:

$$\mu(Y \setminus Y_1) = 0,$$

und alle Funktionen  $f|_{K_n}$  mit  $f \in \mathcal{F}$  und  $n \in \mathbb{N}$  sind bezüglich  $K_n \cap \mathcal{F}$  stetig.

Die Folge  $(K_n : n \in \mathbb{N})$  kann folgendermaßen definiert werden <sup>1)</sup>:

Sei  $(f_i : i \in \mathbb{N})$  eine Abzählung von  $\mathcal{F}$ . Dann wird die kompakte Menge  $K_1^i$  in  $Y$  so gewählt, daß  $\mu(Y \setminus K_1^i) \leq 2^{-(i+1)} \mu(Y)$  und  $f_i|_{K_1^i}$  stetig ist; diese Wahl ist wegen der Straffheit von  $\mu$

<sup>1)</sup> Dieser Beweisteil ist fast wörtlich aus [WZ] entnommen.

nach dem Satz von Lusin ([BE], Sect.68, Ex.5) möglich.

$K_1 := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_1^i$  ist kompakt, für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ist  $f_i|_{K_1}$  bezüglich  $K_1 \cap \mathcal{A}$  stetig, und es gilt  $\mu(Y \setminus K_1) \leq 2^{-1} \mu(Y)$ . Ist  $K_n$  schon gewählt, so konstruiert man analog ein Kompaktum  $K_{n+1}$  in  $Y \setminus \bigcup_{i=1}^n K_i$  mit  $\mu(Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} K_i) \leq 2^{-1} \mu(Y \setminus \bigcup_{i=1}^n K_i)$ , so daß für jedes  $i \in \mathbb{N}$  die Funktion  $f_i|_{K_{n+1}}$  bezüglich  $K_{n+1} \cap \mathcal{A}$  stetig ist.

Die Folge  $(K_n: n \in \mathbb{N})$  hat dann die gewünschten Eigenschaften.

3. Wir definieren nun für  $B \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{A})$  die Menge

$$(2.6) \mathcal{M}_B^+(Y, \mathcal{A}) := \{ \nu \in \mathcal{M}^+(Y, \mathcal{A}) : \nu(Y \setminus B) = 0 \}$$

und damit

$$(2.7) H_0 := H \cap \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y, \mathcal{A}).$$

Weil  $\mathcal{M}_{Y_1}^+(Y, \mathcal{A}) = (\mathcal{X}_{Y \setminus Y_1})^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{A}))$  ist nach Lemma 2.1, ist  $H_0 \in \mathcal{L}(H)$ , und deshalb ist die Menge

$$\mathcal{M}_{H_0}^+(H) = \{ m \in \mathcal{M}^+(H) : m(H \setminus H_0) = 0 \}$$

definiert.

Nach der Definition von  $H_0$  ist  $\mu \in H_0$ . Im nachfolgenden Lemma 2.5 wird gezeigt:

- (a)  $q \in \mathcal{M}_{H_0}^+(H)$ .
- (b)  $H_0$  ist konvex.
- (c)  $\text{Ex} H_0 = H_0 \cap \text{Ex} H$ .

Nach Lemma 2.6 gibt es einen kompakten Raum  $(Y_2, \mathcal{A}_2)$ , eine konvexe, relativkompakte Teilmenge  $H_2$  von  $\mathcal{M}^+(Y_2, \mathcal{A}_2)$  und eine positiv-lineare Injektion

$$\iota : \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y, \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{M}^+(Y_2, \mathcal{V}_2)$$

derart, daß gilt:

$$(d) \iota H_0 = H_2, \iota \text{Ex} H_0 = \text{Ex} H_2.$$

$$(e) \iota \text{ bildet}$$

$$\mathcal{B}\{f \mid H_0 : f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{V}), f \mid K_n \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{V}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

auf  $H_2 \cap \mathcal{L}_0(\overline{H}_2)$  ab.

$$(f) H_2 \in \mathcal{L}_0(\overline{H}_2).$$

Schreiben wir für die erste  $\mathcal{C}$ -Algebra in (e)  $\mathcal{A}_0$ , so ist  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{L}(H_0)$ . Wegen (a) kann  $q$  zu einem normierten Maß auf  $\mathcal{A}_0$  eingeschränkt werden. Wegen (e) und (f) liefert  $\iota$  das Maß  $q \mid \mathcal{A}_0 : \iota^{-1}$  auf  $\mathcal{L}_0(\overline{H}_2)$ . Dieses besitzt - weil  $\overline{H}_2$  kompakt ist - eine eindeutig bestimmte Fortsetzung  $\mathcal{V}q \in \mathcal{M}_{H_2}^+(\overline{H}_2)$  (vgl. [BE], Sect. 65, Th. 1). In Lemma 2.7.b. wird dafür bewiesen:

$$(g) \mathcal{V}q \text{ ist maximal in } \mathcal{M}^+(\overline{H}_2).$$

4. Wir nehmen die Aussagen der Lemmata 2.5 - 2.7 als richtig an. Dann kann die Behauptung  $p(A) = 0$  wie folgt bewiesen werden:

Da wegen der Konstruktion der Kompakta  $K_n$   $A \cap H_0 \in \mathcal{A}_0$  ist, gilt

$$(*) \iota(A \cap H_0) \in \mathcal{L}_0(\overline{H}_2)$$

nach (e) und (f). Nach Annahme ist  $A \cap \text{Ex} H = \emptyset$ , wegen (c) also  $A \cap \text{Ex} H_0 = \emptyset$  und nach (d)  $\iota(A \cap H_0) \cap \text{Ex} H_2 = \emptyset$ . 2.6.f. besagt:

$$(h) \text{Ex} H_2 = H_2 \cap \text{Ex} \overline{H}_2$$

und somit gilt:

$$(**) \iota(A \cap H_0) \cap \text{Ex} \overline{H}_2 = \emptyset.$$

Für das nach (g) maximale Maß  $\varphi$  q ist nach 1.4 für jedes zu  $\text{Ex}\bar{H}_2$  disjunkte  $B \in \mathcal{G}_0(\bar{H}_2)$   $\varphi q(B) = 0$ . Wegen 1.4, (\*), (\*\*) und (a) gilt also:

$$0 = \varphi q(\iota(A \cap H_0)) = q(A \cap H_0) = q(A) = p(A).$$

Damit ist die Aussage des Satzes für den Fall, daß  $(Y, \tau)$  kompakt ist, bewiesen.

II. Nun sei  $(Y, \tau)$  ein beliebiger topologischer Raum.

1. Zu  $\mu \in H$  gibt es eine Folge  $(K_n : n \in \mathbb{N})$  paarweise disjunkter Kompakta in  $Y$ , so daß für  $Y_1 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  gilt

$$\mu(Y \setminus Y_1) = 0.$$

Wir benutzen die Definitionen (2.6) und (2.7). Wie in Abschnitt I. gelten nach Lemma 2.5 die Aussagen (b) und (c). Nach Lemma 2.6 gibt es das Kompaktum  $(Y_2, \tau_2)$ ,  $\iota$  und  $H_2$  wie in I. mit den Eigenschaften (d), (h) und

$$(i) \quad H_2 = \bar{H}_2 \cap \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \tau_2).$$

$$(j) \quad \iota \mathcal{M}(H_0) = \mathcal{M}(H_2).$$

$$(k) \quad \text{Für } A \in \mathcal{G}(Y, \tau) \text{ ist } A \cap Y_1 \in \mathcal{G}(Y_2, \tau_2) \text{ und}$$

$$\mu(A) = \mu(A \cap Y_1).$$

2.  $\bar{H}_2$  ist konvex und kompakt. Nach Teil I des Beweises gibt es zu  $\mu \in \bar{H}_2$  ein Maß  $\bar{p} \in M_1^+(\mathcal{M}(\bar{H}_2))$  mit  $\bar{p}^*(\text{Ex}\bar{H}_2) = 1$ , welches  $\mu$  repräsentiert. Wegen (i) ist Lemma 2.5 anwendbar (man vergleiche die Definition von  $H_0$  in (2.7)), und aus Teil a. dieses Lemmas folgt

$$(***) \quad \bar{p}(\bar{H}_2 \setminus H_2) = 0.$$

Also wird durch die Festsetzung

$$p(A) := \bar{p}(\iota(A \cap H_0)) \text{ für jedes } A \in \mathcal{M}(H)$$

wegen (j) und der trivialen Beziehung  $\mathcal{M}(H_0) = H_0 \cap \mathcal{M}(H)$  ein normiertes Maß  $p$  auf  $\mathcal{M}(H)$  definiert. Es gilt auch  $p^*(ExH) = 1$ , denn ist  $A \in \mathcal{M}(H)$  mit  $A \cap ExH = \emptyset$ , so gilt ähnlich wie in I.  $\iota(A \cap H_0) \cap ExH_2 = \emptyset$ . Aus  $\bar{p}^*(ExH_2) = 1$  folgt daher  $p(A) = 0$  und somit  $p^*(ExH) = 1$ .

Schließlich wird  $\mu$  von  $p$  repräsentiert. Es gilt nämlich nach (k) und (\*\*\*) für jedes  $A \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{F})$ :

$$\mu(A) = \iota \mu(A \cap Y_1) = \int_{H_2} \nu(A \cap Y_1) d\bar{p} = \int_{H_0} \nu(A) dp = \int_H \nu(A) dp,$$

also die Formel (2.3).

Damit ist der Satz unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Lemmata 2.5 - 2.7 bewiesen.

□

Jetzt werden die benötigten Lemmata formuliert und bewiesen.

## 2.5 Lemma:

Es sei  $Y_1 \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{F})$  und  $\mathcal{M}(H)$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $H$ , welche  $\mathcal{M}(H)$  umfaßt. Mit den Definitionen (2.6), (2.7) und

$$(2.8) \quad M_{H_0}^+(\mathcal{M}(H)) := \{p \in M^+(\mathcal{M}(H)) : p(H \setminus H_0) = 0\}$$

gilt:

- Ist  $\mu \in \mathbb{R}^+ H_0$  und  $p \in M^+(\mathcal{M}(H))$  mit  $\mu = R(p)$ , so ist  $p \in M_{H_0}^+(\mathcal{M}(H))$ .
- $H_0$  ist konvex.
- $ExH_0 = H_0 \cap ExH$ .
- Aus  $p \in M_{H_0}^+(\mathcal{M}(H))$ ,  $q \in M^+(\mathcal{M}(H))$  folgt  $q \in M_{H_0}^+(\mathcal{M}(H))$ , wenn  $p \leq q$  oder  $q \leq p$  gilt.

Beweis:

a. Es ist

$$0 = \mu(Y \setminus Y_1) = \int_H \nu(Y \setminus Y_1) \, d\mu.$$

Da der Integrand nichtnegativ ist, gilt:

$$p(H \setminus H_0) = p(\{\nu \in H: \nu(Y \setminus Y_1) > 0\}) = 0.$$

b. Für  $\nu_1, \nu_2 \in H_0$  ist  $\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) \in H$  und  $\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)(Y \setminus Y_1) = 0$ .

Die konvexe Kombination liegt deshalb in  $H_0$ .

c. Stets gilt die Inklusion  $H_0 \cap \text{Ex}H \subset \text{Ex}H_0$ . Ist  $\nu \in \text{Ex}H_0$  und  $\nu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$  mit  $\nu_1, \nu_2 \in H$ , so wird  $\nu$  vom Maß  $\frac{1}{2}(\varepsilon_{\nu_1} + \varepsilon_{\nu_2})$  repräsentiert. Nach a. ist  $\frac{1}{2}(\varepsilon_{\nu_1} + \varepsilon_{\nu_2})(H \setminus H_0) = 0$ , also sind  $\nu_1, \nu_2 \in H_0$  und deshalb gleich. Damit ist  $\nu \in \text{Ex}H$ .

d. beweist man ähnlich wie a.: Sind  $p$  und  $q$  bezüglich " $\prec$ " vergleichbar, so gilt:

$$q(H \setminus H_0) = q((\mathcal{X}_{Y \setminus Y_1})'^{-1}(\mathbb{R}^+)) = p((\mathcal{X}_{Y \setminus Y_1})'^{-1}(\mathbb{R}^+)) = p(H \setminus H_0) = 0.$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt, weil

$$(\mathcal{X}_{Y \setminus Y_1})' \in \check{\mathcal{B}}(H) \cap (-\check{\mathcal{B}}(H)) \text{ ist.}$$

□

## 2.6 Lemma:

Es sei  $(K_n : n \in \mathbb{N})$  eine Folge paarweise disjunkter Kompakta in  $Y$  und  $Y_1 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

Dann gibt es einen kompakten Raum  $(Y_2, \mathcal{T}_2)$  mit  $Y_1 \subset Y_2$ , eine konvexe, relativkompakte Teilmenge  $H_2$  von  $\mathcal{M}^+(Y_2, \mathcal{T}_2)$  und eine positiv-lineare Injektion

$$\iota : \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{M}^+(Y_2, \mathcal{T}_2)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- a.  $Y_1 \cap \mathcal{L}(Y, \mathcal{T}) = Y_1 \cap \mathcal{L}(Y_2, \mathcal{T}_2)$ ; für  $\mu \in \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y, \mathcal{T})$  und  $A \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{T})$  ist  $\mu(A) = \iota\mu(A \cap Y_1)$ .
- b.  $\iota H_0 = H_2$ ;  $\iota \text{Ex} H_0 = \text{Ex} H_2$ .
- c.  $\bigcup \{f \mid H_0 : f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T}), f|_{K_n} \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{T}) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\} = H_2 \cap \mathcal{L}_0(\overline{H}_2)$ .
- d.  $H_2 \in \mathcal{L}_0(\overline{H}_2)$ .
- e.  $H_2 = \overline{H}_2 \cap \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \mathcal{T}_2)$ .
- f.  $\text{Ex} H_2 = H_2 \cap \text{Ex} \overline{H}_2$ .
- g.  $\iota \mathcal{M}(H_0) = \mathcal{M}(H_2)$ .
- h. Die Umkehrabbildung von  $\iota$  von  $H_2$  auf  $H_0$  ist stetig.

Beweis:

1. Wir bezeichnen die Topologie  $Y_1 \cap \mathcal{T}$  mit  $\mathcal{T}_1$  und betrachten

$$\begin{aligned} (Y, \mathcal{T}) &\supset (Y_1, \mathcal{T}_1) \\ \iota_1 : \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y, \mathcal{T}) &\longrightarrow \mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1), \quad \mu \longmapsto \mu|_{\mathcal{L}(Y_1, \mathcal{T}_1)} \\ \iota_1 H_0 &=: H_1 \end{aligned}$$

(zu den Bezeichnungen vergleiche (2.6) und (2.7)).

Allgemein gilt (vgl. [WZ], 2. <sup>1</sup>)):

Für  $B \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{T})$  ist die Abbildung

$$(2.9) \quad \mathcal{M}_B^+(Y, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{M}^+(B, B \cap \mathcal{T}), \quad \mu \longmapsto \mu|_{\mathcal{L}(B, B \cap \mathcal{T})}$$

ein positiv-linearer Homöomorphismus.

Daraus folgt, daß die Definition von  $\iota_1$  sinnvoll ist.

$\iota_1$  hat folgende Eigenschaften:

- i.  $\iota_1$  ist positiv-linear.
- ii.  $\iota_1$  ist ein Homöomorphismus.
- iii.  $H_1 = \iota_1 H_0$  ist abgeschlossen bezüglich  $\nu(\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1), \mathcal{I}(Y_1, \mathcal{T}_1))$  und beschränkt.
- iv.  $\iota_1^B \{f'|_{H_0} : f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T}), f|_{K_n} \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{T}) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\} = \\ = {}^B \{f'|_{H_1} : f \in \mathcal{B}(Y_1, \mathcal{T}_1), f|_{K_n} \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{T}_1) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\}.$
- v.  $\iota_1 \mathcal{M}(\mathcal{H}_0) = \mathcal{M}(\mathcal{H}_1).$

i. und ii. gelten wegen (2.9); da  $H$  abgeschlossen ist, ist  $H_0$  relativ abgeschlossen in  $\mathcal{M}_{Y_1}^+(Y, \mathcal{T})$  und wegen ii.  $H_1$  abgeschlossen in  $\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1)$ , also iii. richtig. iv. und v. folgen unmittelbar aus der Definition von  $\iota_1$ .

2. Auf  $Y_1$  sei die Topologie  $\mathcal{T}_1$  erklärt als Summentopologie (2.10) der Spurtopologien  $K_n \cap \mathcal{T}_1$ ,

d.h. es ist  $A \in \mathcal{T}_1$  genau dann, wenn  $A \cap K_n \in K_n \cap \mathcal{T}_1$  ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

$(Y_1, \mathcal{T}_1)$  ist ein lokalkompakter,  $\sigma$ -kompakter Raum und besitzt deshalb eine Kompaktifizierung.  $(Y_2, \mathcal{T}_2)$  sei eine beliebige Kompaktifizierung von  $(Y_1, \mathcal{T}_1)$ . In Analogie zu Abschnitt 1.

<sup>1</sup>) Wir benötigen (2.9) in §3 in einer allgemeineren Form.

Diese wird in (3.1) bewiesen.

betrachten wir:

$$\begin{aligned}
 i &: Y_1 \hookrightarrow Y_2 \\
 \iota_2 &: \mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1) = \mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \mathcal{T}_2) \subset \mathcal{M}^+(Y_2, \mathcal{T}_2), \mu \mapsto \mu \circ i^{-1} \\
 &\quad \iota_2 H_1 = : H_2 \subset \overline{H}_2 \subset \mathcal{M}^+(Y_2, \mathcal{T}_2)
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß die Definition von  $\iota_2$  und die übrigen Teile dieses Diagramms sinnvoll sind und sammeln einige Eigenschaften von  $\iota_2$ .

Zuerst stellen wir fest:

$$(*) \quad \mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1) = \mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1')$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned}
 (**) \quad \mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1) &\longrightarrow \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \mathcal{T}_2), \mu \mapsto \mu \circ i^{-1} \\
 &\text{ist ein Homöomorphismus}
 \end{aligned}$$

(\*\*) gilt wegen (2.9), denn die Bildmaßabbildung zur Injektion in (\*\*) ist gerade die Umkehrabbildung zur Einschränkungsbildung in (2.9).

Jede  $\mathcal{T}_1'$ -offene Menge ist abzählbare Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{L}(Y_1, \mathcal{T}_1)$ ; also ist  $\mathcal{T}_1' \subset \mathcal{L}(Y_1, \mathcal{T}_1)$  und somit

$$(***) \quad \mathcal{L}(Y_1, \mathcal{T}_1) = \mathcal{L}(Y_1, \mathcal{T}_1').$$

Deswegen ist  $\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1') \subset \mathcal{M}^+(\mathcal{L}(Y_1, \mathcal{T}_1'))$ , und weil die Identität von  $(Y_1, \mathcal{T}_1')$  nach  $(Y_1, \mathcal{T}_1)$  stetig ist, auch  $\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1') \subset \mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1)$ .  $\mu \in \mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{T}_1)$  liegt wegen (\*\*\*) in  $\mathcal{M}^+(\mathcal{L}(Y_1, \mathcal{T}_1'))$ .  $\mu$  ist aber auch straff bezüglich  $\mathcal{T}_1'$ . Zu  $B \in \mathcal{L}(Y_1, \mathcal{T}_1')$  gibt es nämlich in jeder Teilmenge  $B \cap K_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge paarweise disjunkter  $\mathcal{T}_1'$ -kompakter Mengen  $(K_{nj}: j \in \mathbb{N})$ , so daß  $\mu((B \cap K_n) \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_{nj}) = 0$  ist. Eine Abzählung der Menge  $\{K_{nj}: (n, j) \in \mathbb{N}^2\}$

liefert eine Folge von  $\mathcal{F}_1$ -Kompakta, welche  $B$  dem Maß nach ausschöpft. Also liegt  $\mu$  in  $\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{F}_1)$  und  $(*)$  ist bewiesen. Wegen  $(*)$  und  $(**)$  ist die Definition von  $\iota_2$  sinnvoll, denn  $\iota_2$  ist die Komposition der Identität von  $\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{F}_1)$  nach  $\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{F}_1)$  mit dem Homöomorphismus aus  $(**)$ .

Es gilt:

i'.  $\iota_2$  ist positiv-linear.

ii'.  $\iota_2$  ist injektiv; seine Umkehrabbildung ist stetig von  $\mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \mathcal{F}_2)$  auf  $\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{F}_1)$ .

iii'.  $H_2$  ist relativkompakt in  $\mathcal{M}^+(Y_2, \mathcal{F}_2)$ ;  $H_2 = \overline{H_2} \cap \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \mathcal{F}_2)$ .

iv'.  $\iota_2^B \{f' | H_1 : f \in \mathcal{B}(Y_1, \mathcal{F}_1), f|_{K_n} \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{F}_1) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\} = H_2 \cap \mathcal{L}_0(\overline{H_2})$ .

v'.  $\iota_2 \mathcal{M}(H_1) = \mathcal{M}(H_2)$ .

Wir beweisen die Aussagen i'. - v'..

i'.  $\iota_2$  ist als Bildmaßabbildung positiv-linear.

ii'. Die Injektivität von  $\iota_2$  liest man aus  $(*)$  und  $(**)$  ab.

Ferner ist  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_1$ , also

$\nu(\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{F}_1), \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{F}_1)) \subset \nu(\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{F}_1), \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{F}_1))$ . Die Identität von  $\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{F}_1)$  auf  $\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{F}_1)$  ist damit stetig;

trivialerweise ist auch die Umkehrabbildung des Homöomorphismus in  $(**)$  stetig und deshalb  $\iota_2^{-1} | \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \mathcal{F}_2)$  als Komposition dieser beiden Abbildungen.

iii'. Nach iii. ist  $H_1$  beschränkt, und damit  $H_2$ . Als beschränkte Teilmenge von  $\mathcal{M}(Y_2, \mathcal{F}_2)$  ist  $H_2$  relativkompakt bezüglich  $\sigma(\mathcal{M}(Y_2, \mathcal{F}_2), \mathcal{C}(Y_2, \mathcal{F}_2))$ , also auch bezüglich  $\nu(\mathcal{M}^+(Y_2, \mathcal{F}_2), \mathcal{F}(Y_2, \mathcal{F}_2))$  (man vergleiche Seite 17).

Weiter ist  $H_1$  nach iii. bezüglich  $\nu(\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{Y}_1), \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{Y}_1))$  abgeschlossen, also auch in der feineren Topologie  $\nu(\mathcal{M}^+(Y_1, \mathcal{Y}_1), \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{Y}_1))$  und wegen (\*\*) relativabgeschlossen in  $\mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \mathcal{Y}_2)$ . Das heißt aber gerade  $H_2 = \bar{H}_2 \cap \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \mathcal{Y}_2)$ .  
iv'.  $\mathcal{A}$  sei die Menge der aus den Auswertungsfunktionalen und den Konstanten gebildeten Polynome auf  $\bar{H}_2$ , also der Funktionen mit der Gestalt

$$\sum_{j=1}^n a_j \prod_{\substack{i=1, \dots, j \\ k_1 + \dots + k_j = j}} (f_i' | \bar{H}_2)^{k_i} \quad \text{mit } a_j \in \mathbb{R}, f_1 \in \mathcal{C}(Y_2, \mathcal{Y}_2), k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Trivialerweise ist  ${}^B\mathcal{A} = {}^B\{f' | \bar{H}_2 : f \in \mathcal{C}(Y_2, \mathcal{Y}_2)\}$ .

$\mathcal{A}$  ist eine Algebra, enthält die Konstanten und trennt die Punkte von  $\bar{H}_2$ . Weil  $\bar{H}_2$  kompakt ist, liegt  $\mathcal{A}$  dicht in  $\mathcal{C}(\bar{H}_2)$  bezüglich der Supremumsnorm nach dem Satz von Stone-Weierstraß ([DS], IV.6.16), hat also dieselbe Initial- $\sigma$ -Algebra.

Deshalb gilt

$$\mathcal{L}_0(\bar{H}_2) = {}^B\mathcal{C}(\bar{H}_2) = {}^B\mathcal{A} = {}^B\{f' | \bar{H}_2 : f \in \mathcal{C}(Y_2, \mathcal{Y}_2)\}$$

und damit

$$\begin{aligned} H_2 \cap \mathcal{L}_0(\bar{H}_2) &= \\ &= {}^B\{f' | H_2 : f \in \mathcal{C}(Y_2, \mathcal{Y}_2)\} \subset \\ &\subset {}^B\{f' | H_1 : f \in \mathcal{C}(Y_1, \mathcal{Y}_1)\} = \\ &= {}^B\{f' | H_1 : f \in \mathcal{B}(Y_1, \mathcal{Y}_1), f|_{K_n} \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{Y}_1) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der umgekehrten Inklusion sieht man so ein:

Da die Topologie  $\mathcal{Y}_1$  lokalkompakt ist, gilt  $Y_1 \in \mathcal{Y}_2$ . Deshalb sind die Mengen  $K_n$  offen-abgeschlossen in  $Y_2$ , also Bairesch, und somit gilt:

$$(\text{****}) \quad Y_1 \subset \mathcal{L}_0(Y_2, \gamma_2).$$

Jede Funktion  $f$  auf  $Y_1$ , deren Einschränkungen  $f|_{K_n}$  stetig sind, kann also durch 0 zu einer Baireschen Funktion  $f_0$  auf  $Y_2$  fortgesetzt werden. Nach Lemma 2.3 ist  $f_0|_{\overline{H}_2}$  selbst Bairesch und daraus folgt die Behauptung.

v'. Aus (\*\*\*) folgt  $\mathcal{B}(Y_1, \gamma_1) = \mathcal{B}(Y_2, \gamma_2)|_{Y_1}$ . Daraus folgt v'.

3. Wir setzen nun die Ergebnisse von 1. und 2. zum Beweis des Lemmas zusammen.

Die Abbildung

$$\iota : \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \gamma_2) \longrightarrow \mathcal{M}^+(Y_2, \gamma_2), \quad \iota := \iota_2 \circ \iota_1$$

ist positiv-linear und injektiv, weil nach i. und i'. bzw. ii. und ii'.  $\iota_1$  und  $\iota_2$  diese Eigenschaften haben.  $H_2 = \iota H_0$  ist nach iii'. relativkompakt.

Die Beziehung

$$Y_1 \cap \mathcal{L}(Y, \gamma) = Y_1 \cap \mathcal{L}(Y_2, \gamma_2)$$

folgt wegen

$$Y_1 \cap \mathcal{L}(Y, \gamma) = \mathcal{L}(Y_1, \gamma_1) \text{ und } \mathcal{L}(Y_1, \gamma_1) = Y_1 \cap \mathcal{L}(Y_2, \gamma_2)$$

aus (\*\*\*), der Rest von a. aus

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \cap Y_1) = (\mu|_{\mathcal{L}(Y_1, \gamma_1)})(A \cap Y_1) = \\ &= (\mu|_{\mathcal{L}(Y_1, \gamma_1)}) \circ \iota^{-1}(A \cap Y_1) = \iota \mu(A \cap Y_1). \end{aligned}$$

b. gilt, weil  $\iota$  die Menge  $H_0$  bijektiv und positiv-linear auf  $H_2$  abbildet.

c. ist die Zusammenfassung von iv. und iv'.

Nach Lemma 2.3 ist das Auswertungsfunktional  $(\chi_{Y_2 \setminus Y_1})'|_{\overline{H}_2}$  zu der nach (\*\*\*\*) Baireschen Menge  $Y_2 \setminus Y_1$  selbst Bairesch

und  $H_2 = ((\chi_{Y_2 \setminus Y_1})'|_{\overline{H}_2})^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{L}_0(\overline{H}_2)$ , womit d. bewiesen ist.

e. wurde in iii'. gezeigt. Wegen e. ist  $H_2 = \overline{H}_2 \cap \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y_2, \gamma_2)$ ; deshalb ist Lemma 2.5 auf diese Situation anwendbar: man setze dort  $Y = Y_2$ ,  $Y_1 = Y_1$ ,  $H_0 = H_2$  und  $H = \overline{H}_2$ . Damit folgt aus 2.5.c. der Punkt f.

g. erhält man sofort aus v. und v'. und h. schließlich aus ii. und ii'..

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

□

Die letzte Lücke im Beweis des Satzes 2.4 wird mit dem zum Beweis von (g) verwendeten Lemma 2.7 geschlossen.

Wie dort definieren wir zu  $p \in \mathcal{M}_{H_0}^+(H)$  ein Maß aus  $\mathcal{M}^+(\overline{H}_2)$ :

Weil  $\iota$  die Meßbarkeitseigenschaften aus Lemma 2.6.c. und d. hat, liefert  $p$  vermöge  $\iota$  ein Bairemaß  $\tilde{p}$  auf  $\overline{H}_2$  durch die Festsetzung

$$\tilde{p}(B) := p(\iota^{-1}(B)) \text{ für jedes } B \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}}(\overline{H}_2).$$

Da  $\overline{H}_2$  kompakt ist, besitzt  $p$  eine eindeutig bestimmte Fortsetzung  $\varphi p \in \mathcal{M}_{H_2}^+(\overline{H}_2)$ . Somit ist die folgende Abbildung konstruiert:

$$(2.11) \quad \varphi : \mathcal{M}_{H_0}^+(H) \longrightarrow \mathcal{M}_{H_2}^+(\overline{H}_2), \quad p \longmapsto \varphi p.$$

## 2.7 Lemma:

Es seien die Voraussetzungen von Lemma 2.6 erfüllt und  $\varphi$  gemäß (2.11) definiert. Dann gilt:

a.  $\varphi$  ist surjektiv. Falls es auch injektiv ist, gilt  $p \not\leq q$  genau dann, wenn  $\varphi p \not\leq \varphi q$  ist.

b. Ist  $(Y, \gamma)$  kompakt, so ist  $\varphi$  injektiv und  $p \in \mathcal{M}_{H_0}^+(H)$  genau dann bezüglich " $\leq$ " maximal, wenn  $\varphi p$  bezüglich " $\leq$ " maximal ist.

Bemerkung: In Lemma 4.1 wird gezeigt, daß  $\varphi$  s t e t s bijektiv ist.

Beweis von Lemma 2.7:

a.  $\varphi$  ist surjektiv. Für  $\bar{p} \in \mathcal{M}_{H_2}^+(\bar{H}_2)$  ist  $\bar{p}(H_2) = \bar{p}(\bar{H}_2)$ . Weil  $H_2 \in \mathcal{L}(\bar{H}_2)$  ist und  $\iota^{-1}|_{H_2}$  stetig, liefert die Festsetzung

$$A \longmapsto \bar{p}(\iota A) \text{ für jedes } A \in \mathcal{L}(H_0)$$

ein normiertes Maß aus  $\mathcal{M}^+(H_0)$ . Dessen triviale Fortsetzung  $p'$  auf  $\mathcal{L}(H)$  ist aus  $\mathcal{M}_{H_0}^+(H)$ , und es ist  $\bar{p} = \varphi p'$ .

Jetzt beweisen wir den zweiten Teil von a..

Ist  $p \in \mathcal{M}_{H_0}^+(H)$ , so kann zu  $\bar{p} = \varphi p$  das Maß  $p'$  wie oben konstruiert werden. Verlangt man, daß  $\varphi$  injektiv ist, so gilt  $p = p'$  und deshalb

$$(*) \quad \varphi p|_{\mathcal{M}(\bar{H}_2)} = (p|_{\mathcal{M}(H_0)}) \circ \iota^{-1},$$

wenn  $\iota|_{H_0}$  als  $\mathcal{M}(H_0)$ - $\mathcal{M}(\bar{H}_2)$  meßbare Abbildung aufgefaßt wird (vergleiche 2.6.g).

Zu jeder Funktion  $f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$  sei  $\tilde{f} : Y_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f} := \begin{cases} f(y) & \text{für } y \in Y_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aus 2.6.a. folgt in Analogie zu der dortigen Beziehung für

$\nu \in H_0 \quad \nu(f) = \iota \nu(\tilde{f})$  und daraus

$$(**) \quad f'|_{H_0} = \tilde{f}'|_{H_2} \circ \iota.$$

Es seien  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$  und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Wegen (\*\*) sind äquivalent

$$i. \quad \int_{H_0} \left( \bigvee_{i=1}^n (f_i' + c_i) \right) |H| dp \leq \int_{H_0} \left( \bigvee_{i=1}^n (f_i' + c_i) \right) |H| dq$$

$$ii. \quad \int_{H_0} \left( \bigvee_{i=1}^n (\tilde{f}_i' + c_i) \right) |H_2 \circ \iota| dp \leq \int_{H_0} \left( \bigvee_{i=1}^n (\tilde{f}_i' + c_i) \right) |H_2 \circ \iota| dq$$

und wegen (\*) dazu

$$iii. \quad \int_{H_2} \left( \bigvee_{i=1}^n (\tilde{f}_i' + c_i) \right) |H_2| d\varphi p \leq \int_{H_2} \left( \bigvee_{i=1}^n (\tilde{f}_i' + c_i) \right) |H_2| d\varphi q.$$

Da  $\{f \in \mathcal{B}(Y_2, \mathcal{T}_2) : f|_{Y_2 \setminus Y_1} = 0\} = \{\tilde{f} : f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})\}$  ist, folgt wegen der Äquivalenz von i. und iii. aus  $p \triangleleft q$  die Beziehung  $\mathcal{G} p \triangleleft \mathcal{G} q$ .

Die umgekehrte Richtung zeigt man analog.

b. Wenn  $(Y, \mathcal{T})$  kompakt ist, dann ist  $\mathcal{G}$  injektiv. In diesem Fall gilt nämlich:

$$H_0 \cap \mathcal{G}_0(H) = H_0 \cap {}^B \{f' : H : f \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{T})\} \subset \\ \subset {}^B \{f' : H_0 : f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T}), f|_{K_n} \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{T}) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\}.$$

$p$  und  $q$  mit  $\mathcal{G} p = \mathcal{G} q$  stimmen nach Konstruktion von  $\mathcal{G}$  auf der letzteren  $\sigma$ -Algebra, also auf  $H_0 \cap \mathcal{G}_0(H)$  überein. Weil  $p(H \setminus H_0) = q(H \setminus H_0) = 0$  ist, gilt  $p|_{\mathcal{G}_0(H)} = q|_{\mathcal{G}_0(H)}$ , also  $p = q$ .

Zusammen mit a. ist der Beweis von b. damit vollständig, weil nach Satz 2.2 " $\triangleleft$ " bei kompaktem Grundraum mit " $\triangleleft$ " zusammenfällt.

□

Wir notieren noch eine allgemeinere Version des Darstellungssatzes. Vorher setzen wir fest:

Ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf einer Menge  $X$  und  $p$  ein endliches Maß auf  $\mathcal{M}$ , so ist die p-Vervollständigung von  $\mathcal{M}$  das Mengensystem:

$$\mathcal{M}_p := \{C \in \mathcal{P}(X) : \text{es gibt } B_1, B_2 \in \mathcal{M} \text{ mit } B_1 \subset C \subset B_2 \text{ und } p(B_1) = p(B_2)\}$$

Sie ist eine  $\sigma$ -Algebra und  $p$  wird auf kanonische Weise zu einem Maß darauf fortgesetzt, der Vervollständigung von  $p$ .

Sie wird wieder mit  $p$  bezeichnet. Die Elemente von  $\mathcal{M}_p$  heißen p-meßbar, eine Funktion auf  $X$ , welche meßbar bezüglich  $\mathcal{M}_p$  ist, heißt ebenfalls p-meßbar.

2.8 Korollar: (zu Satz 2.4)

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4 gilt:

Zu jedem Element  $\mu \in H$  gibt es ein normiertes Maß  $p$  auf der  $\mathcal{G}$ -Algebra  $B\{f' | \text{ExH}: f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})\}$  über  $\text{ExH}$ , so daß für jede  $\mu$ -meßbare beschränkte Funktion  $g$  auf  $Y$  gilt:

a.  $\{\nu \in \text{ExH}: g \text{ ist } \nu\text{-meßbar}\}$  ist  $p$ -meßbar mit Maß 1. Das Funktional

$$g' : \text{ExH} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \nu \longmapsto \int_Y g \, d\nu$$

ist  $p$ -fast überall definiert und  $p$ -meßbar.

b. 
$$\mu(g) = \int_{\text{ExH}} \left( \int_Y g \, d\nu \right) dp.$$

Beweis:

1. Das darstellende Maß aus Satz 2.4 kann wegen  $p^*(\text{ExH}) = 1$  zu einem normierten Maß auf  $B\{f' | \text{ExH}: f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})\}$  eingeschränkt werden. Die Einschränkung heiße wieder  $p$ . Für sie gilt die Integralformel  $\mu(f) = \int_{\text{ExH}} \nu(f) \, dp$  für jedes  $f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$ .
2. Zu  $g$  gibt es ein  $f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{T})$  und  $N \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{T})$  mit  $\mu(N) = 0$ , so daß

$$f(y) = g(y) \text{ für alle } y \in Y \setminus N.$$

Es ist  $\int_{\text{ExH}} \nu(N) \, dp = \mu(N) = 0$  und deshalb  $p(\{\nu \in \text{ExH}: \nu(N) > 0\}) = 0$ . Also ist  $f' | \text{ExH} = g' | \text{ExH}$  außerhalb dieser  $p$ -Nullmenge (auf die Nullmenge sei  $g'$  konstant fortgesetzt). Ferner gilt

$$\mu(g) = \mu(f) = \int_{\text{ExH}} \nu(f) \, dp = \int_{\text{ExH}} \left( \int_Y g \, d\nu \right) dp.$$

Damit ist der Beweis vollständig.

□

Eine einfache, aber für Anwendungen wichtige Folgerung ist:

2.9 Korollar:

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4 ist  $\text{ExH} \neq \emptyset$ .

Bemerkung: a. Auch bei kompaktem Grundraum  $(Y, \mathcal{T})$  verallgemeinern Satz 2.4 und Korollar 2.8 das klassische Ergebnis. Auch für diesen Spezialfall wird im wesentlichen derselbe mathematische Apparat benötigt, wie bei beliebigem Grundraum.

b. In [WZ] beweist von Weizsäcker unter den Voraussetzungen von Satz 2.4 folgende Aussage:

Es sei  $\mathcal{A}_0$  eine abzählbare Menge universell meßbarer Funktionen auf  $Y$  (d.h.  $\nu$ -meßbar für jedes  $\nu \in \mathcal{M}^+(Y)$ ) und  $\mathcal{A}$  die Menge derjenigen beschränkten, universell meßbaren Funktionen auf  $Y$ , welche bezüglich der von  $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{B}_0(Y, \mathcal{T})$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra meßbar sind. Dann gibt es zu jedem  $\mu \in H$  ein normiertes Maß  $p$  auf der von  $\{f' \mid \text{ExH}: f \in \mathcal{A}\}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra mit

$$\mu(f) = \int_{\text{ExH}} \nu(f) dp \text{ für jedes } f \in \mathcal{A}.$$

Für verschiedene Familien  $\mathcal{A}_0$  werden die entsprechenden darstellenden Maße im allgemeinen nicht verträglich sein. Dieser Nachteil ist jetzt behoben. Außerdem ist der Nachweis der Gültigkeit der Integralformel für eine wesentlich größere Funktionenklasse erbracht.

### §3. Existenz und Eindeutigkeit der Integraldarstellung für dem Maß nach metrisierbare Grundräume

Für diesen Paragraphen sei  $H$  wieder eine nichtleere, konvexe, schwach abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von  $\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{F})$ . Erfüllt  $Y$  für  $\mu \in H$  gewisse Metrisierbarkeitsforderungen, dann gibt es ein straffes Maß über einer Teilmenge von  $ExH$ , welches  $\mu$  repräsentiert. Wir definieren:

Für  $\mu \in \mathcal{M}^+(Y, \mathcal{F})$  ist  $Y$  dem Maß nach metrisierbar (kurz:  $\mu$ -metrisierbar), wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine metrisierbare Menge  $B \in \mathcal{L}(Y)$  gibt, so daß  $\mu(Y \setminus B) < \varepsilon$  ist.

Das folgende Lemma zeigt die Bedeutung dieser Forderung für die Beweise:

#### 3.1 Lemma:

Für  $\mu \in \mathcal{M}^+(Y, \mathcal{F})$  sind äquivalent:

a.  $Y$  ist  $\mu$ -metrisierbar.

b. Es gibt eine Folge paarweise disjunkter, metrisierbarer Kompakta  $(K_n : n \in \mathbb{N})$  in  $Y$ , so daß  $\mu(Y \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) = 0$  ist.

In diesem Falle gilt für die Folge  $(K_n : n \in \mathbb{N})$  das Lemma 2.6 mit dem Zusatz, daß der kompakte Raum  $(Y_2, \mathcal{F}_2)$  metrisierbar gewählt werden kann.

Beweis:

Ist a. richtig, so gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine metrisierbare Menge  $B_n \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{F})$  mit  $\mu(Y \setminus B_n) < \frac{1}{n}$ . Die Mengen  $B'_1 := B_1$  und  $B'_n := B_n \setminus \bigcup_{i < n} B_i$  für  $n > 1$  sind paarweise disjunkt und ebenfalls metrisierbar. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es eine Folge paarweise disjunkter Kompakta  $(K_{nj} : j \in \mathbb{N})$  in  $B'_n$ , so daß

$\mu(B'_n \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_{nj}) = 0$  ist. Bildet man aus der Menge

$\{K_{nj} : (n, j) \in \mathbb{N}^2\}$  die Folge  $(K_n : n \in \mathbb{N})$  durch Abzählung, so ist

$$\mu(Y \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) = \mu(Y \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = 0.$$

Da die Mengen  $K_n$  nach Konstruktion paarweise disjunkt und als Teilmengen metrisierbarer Mengen selbst metrisierbar sind, ist b. bewiesen.

Aus b. folgt a. unmittelbar.

Bevor der Beweis zu Ende geführt wird, sei an folgendes erinnert:

Ist  $Y_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  und darauf  $\mathcal{T}_1$  die Summentopologie der Spurtopologien  $K_n \cap \mathcal{T}$ , so kann in Lemma 2.6  $(Y_2, \mathcal{T}_2)$  als irgendeine Kompaktifizierung von  $(Y_1, \mathcal{T}_1)$  gewählt werden ((2.10)f).

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei nun  $\xi_n$  eine Metrik, welche die Topologie  $K_n \cap \mathcal{T}$  erzeugt. O.E. gelte  $0 \leq \xi_n < 1$ . Die Abbildung

$$\xi : Y_1 \times Y_1 \longrightarrow \mathbb{R}^+, (y_1, y_2) \longrightarrow \begin{cases} 2^{-n} \xi_n(y_1, y_2), & \text{falls } y_1, y_2 \in K_n \\ 1, & \text{falls } y_1 \in K_n, y_2 \in K_m, n \neq m \end{cases}$$

ist eine Metrik auf  $Y_1$  und erzeugt  $\mathcal{T}_1$ . Da  $\mathcal{T}_1$  separabel ist, ist  $(Y_1, \mathcal{T}_1)$  homöomorph zu einem Teilraum des Hilbertwürfels  $\hat{Y} := [0, 1]^{\mathbb{N}}$  (versehen mit der Produkttopologie der euklidischen Topologie auf  $[0, 1]$ ). Wir identifizieren  $(Y_1, \mathcal{T}_1)$  mit diesem Teilraum. Der Abschluß von  $Y_1$  in  $\hat{Y}$ , versehen mit der Spurtopologie ist dann nach der obigen Bemerkung der gesuchte metrisierbare Raum  $(Y_2, \mathcal{T}_2)$ .

□

Bemerkung: Einige - insbesondere in der Wahrscheinlichkeitstheorie - häufig auftretende Räume sind für jede  $\mu \in \mathcal{M}^+(Y, \mathcal{T})$  dem Maß nach metrisierbar.

Neben den metrischen gehören dazu die Räume mit abzählbarer Basis der Topologie. Jede kompakte Teilmenge eines solchen Raumes ist nämlich metrisierbar. Diese Eigenschaft haben auch alle Suslinschen Räume und deren Teilräume (ein Hausdorff-Raum heißt Suslin, wenn er das Bild eines vollständig metrisierbaren, separablen Raumes unter einer stetigen Abbildung ist. Nach [HJ], III.1.3 ist jede lokalkompakte Teilmenge eines Suslinschen Raumes vollständig metrisierbar und separabel).

Für  $\mu$ -metrisierbaren Grundraum nimmt der Existenzsatz die folgende Gestalt an:

### 3.2 Satz:

Es sei  $\mu \in H$  und  $Y$   $\mu$ -metrisierbar.  $(K_n : n \in \mathbb{N})$  sei die gemäß Lemma 3.1.b. existierende Folge von Kompakta. Dann gilt:

- Es ist  $\text{Ex}H_0 = \{ \nu \in \text{Ex}H : \nu(Y \setminus Y_1) = 0 \} \in \mathcal{MO}(H)$  und  $\mathcal{L}(\text{Ex}H_0) = \mathcal{MO}(\text{Ex}H_0)$ .
- Es gibt ein  $p \in \mathcal{M}_1^+(\text{Ex}H_0)$ , welches  $\mu$  repräsentiert.

Dem Beweis sei eine einfache Feststellung vorausgeschickt.

### 3.3 Lemma:

Die Voraussetzungen von Lemma 2.6 seien erfüllt. Zusätzlich sei angenommen, daß  $(Y_2, \tau_2)$  metrisierbar ist. Dann gilt:

- $\bar{H}_2$  ist metrisierbar.
- $\text{Ex}H_2 \in \mathcal{MO}(H_2)$ .
- $\mathcal{L}(\text{Ex}H_2) = \mathcal{MO}(\text{Ex}H_2)$ .

Beweis:

$Y_2$  ist kompakt. Deshalb ist auch  $\bar{H}_2$  kompakt, und es gilt

$$(*) \quad \mathcal{L}_0(\bar{H}_2) = {}^B\{f' | \bar{H}_2 : f \in \mathcal{C}(Y_2, \mathcal{T}_2)\} \subset \mathcal{MO}(\bar{H}_2)$$

(vergleiche S.33)

Weil  $Y_2$  metrisierbar ist, ist auch  $\bar{H}_2$  metrisierbar ([HJ], IV.4.A.Th.4), also ist a. richtig.

In einem metrisierbaren Raum stimmen die Baireschen und die Borelschen Mengen überein ([HJ], I.6.A.Prop.5), also ist

$$(**) \quad \mathcal{L}_0(\bar{H}_2) = \mathcal{L}(\bar{H}_2).$$

Wegen (\*) und (\*\*) ist

$$(***) \quad \mathcal{L}(\bar{H}_2) = \mathcal{MO}(\bar{H}_2),$$

woraus c. folgt.

Nach a. und 1.6 ist  $\text{Ex}\bar{H}_2$  eine  $G_\delta$ -Menge in  $\bar{H}_2$ , also nach (\*\*\*) aus  $\mathcal{MO}(\bar{H}_2)$ . Nach 2.6.f. gilt aber  $\text{Ex}H_2 = H_2 \cap \text{Ex}\bar{H}_2$ , und deshalb ist  $\text{Ex}H_2 \in \mathcal{MO}(H_2)$  und b. ist ebenfalls bewiesen.

□

Beweis von Satz 3.2:

Wir benutzen zum Beweis das Lemma 2.6 und nehmen an, daß  $(Y_2, \mathcal{T}_2)$  metrisierbar ist. Das ist nach Lemma 3.1 gerechtfertigt, weil  $Y$   $\mu$ -metrisierbar ist.

Nach Lemma 3.3.b. ist  $\text{Ex}H_2 \in \mathcal{MO}(H_2)$  und somit nach 2.6.b. und g.

$$\text{Ex}H_0 = \iota^{-1}(\text{Ex}H_2) \in \mathcal{MO}(H_0) \subset \mathcal{MO}(H).$$

Nach h. ist  $\iota^{-1}|_{H_2}$  stetig. Also gilt unter Beachtung von 3.3.b.:

$$\mathcal{L}(\text{Ex}H_0) \subset \iota^{-1}(\mathcal{L}(\text{Ex}H_2)) = \iota^{-1}(\mathcal{MO}(\text{Ex}H_2)) = \mathcal{MO}(\text{Ex}H_0) \subset \mathcal{L}(\text{Ex}H_0),$$

woraus

$$\mathcal{L}(\text{ExH}_0) = \mathcal{M}(\text{ExH}_0)$$

folgt.

b. Zu  $\mu \in H_2$  gibt es wegen der Metrisierbarkeit von  $\overline{H}_2$  (3.3.a.) nach 1.7 ein  $\overline{p} \in \mathcal{M}_1^+(\text{Ex}\overline{H}_2)$  mit  $\mu = r(\overline{p})$ , also nach Satz 2.2 auch mit  $\mu = R(\overline{p})$ . Wegen der Stetigkeit von  $\iota^{-1}|_{H_2}$  und weil  $\overline{p}(\text{Ex}\overline{H}_2 \setminus \text{ExH}_2) = 0$  ist, wird durch die Festsetzung

$$p(A) := \overline{p}(\iota(A)) \text{ f\"ur jedes } A \in \mathcal{M}(\text{ExH}_0)$$

ein Maß  $p \in \mathcal{M}_1^+(\text{ExH}_0)$  definiert, welches wegen 2.6.a.  $\mu$  repräsentiert.

□

Ist  $Y$  selbst metrisierbar und separabel, vereinfacht sich die Situation weiter.

### 3.4 Satz:

Ist  $(Y, \tau)$  metrisierbar und separabel, so ist  $\text{ExH}$  eine  $G_\delta$ -Menge und  $\mathcal{L}(H) = \mathcal{M}(H)$ .

Zu  $\mu \in H$  gibt es dann ein  $p \in \mathcal{M}_1^+(\text{ExH})$  mit  $\mu = R(p)$ .

Beweis:

1. Es gilt folgende Verallgemeinerung von (2.9):

(3.1) Es sei  $(\hat{Y}, \hat{\tau})$  ein topologischer Raum und  $(Y, \tau) \subset (\hat{Y}, \hat{\tau})$ .

Ferner sei  $k : Y \hookrightarrow \hat{Y}$  die kanonische Einbettung und

$$\mathcal{M}_Y^+(\hat{Y}, \hat{\tau}) := \{ \nu \in \mathcal{M}^+(\hat{Y}, \hat{\tau}) : \nu(\hat{Y} \setminus Y) = 0 \}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\kappa : \mathcal{M}^+(Y, \tau) \longrightarrow \mathcal{M}_Y^+(\hat{Y}, \hat{\tau}), \mu \longmapsto \mu \circ k^{-1}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis von (3.1):

Die Bijektivität von  $K$  ist klar.  $K$  ist stetig, weil für jedes Netz  $(\nu_\alpha : \alpha \in \mathcal{A})$  und jedes Maß  $\nu$  in  $\mathcal{M}^+(Y, \hat{\mathcal{H}})$  nach dem Portmanteautheorem ([T01], Th.8.1) folgende Aussagen äquivalent sind:

$(\nu_\alpha : \alpha \in \mathcal{A})$  konvergiert gegen  $\nu$ .

$\liminf_{\alpha \in \mathcal{A}} \nu_\alpha(G) \geq \nu(G)$  für alle  $G \in Y \cap \hat{\mathcal{H}}$  und  $\nu_\alpha(Y) \rightarrow \nu(Y)$ .

$\liminf_{\alpha \in \mathcal{A}} K\nu_\alpha(G) \geq K\nu(G)$  für alle  $G \in \hat{\mathcal{H}}$  und  $K\nu_\alpha(Y) \rightarrow K\nu(Y)$ .

$(K\nu_\alpha : \alpha \in \mathcal{A})$  konvergiert gegen  $K\nu$ .

Weil  $K$  bijektiv ist, folgt daraus auch die Stetigkeit von  $K^{-1}$ .

2. O.E. sei nun  $Y$  Teilraum des Hilbertwürfels  $\hat{Y}$ . Wir benutzen die Bezeichnungen von (3.1) weiter. Weil  $\hat{Y}$  kompakt und metrisierbar ist, gilt das auch für  $\overline{KH}$ . Deshalb ist  $\mathcal{L}(\overline{KH}) = \mathcal{M}(\overline{KH})$ . Nach (3.1) ist  $KH$  relativ abgeschlossen in  $\mathcal{M}_Y^+(\hat{Y})$ , d.h.  $KH = \overline{KH} \cap \mathcal{M}_Y^+(Y)$ . Aus den beiden letzten Beziehungen und (3.1) folgt:

$$\mathcal{L}(H) = \mathcal{M}(H).$$

3. Es gilt auch  $\text{Ex } KH = KH \cap \text{Ex } \overline{KH}$ . Denn zu  $\nu \in \text{Ex } KH$  gibt es eine abzählbare Vereinigung  $Y'$  von Kompakta in  $Y$  mit  $\nu(Y \setminus Y') = 0$ . Diese Beziehung vererbt sich auf  $\nu_1, \nu_2$  aus  $\overline{KH}$  mit  $\nu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$ . Diese beiden Maße sind also aus  $KH$  und somit gleich  $\nu$ , d.h.  $\nu \in \text{Ex } \overline{KH}$ .

Nach 1.6 ist  $\text{Ex } \overline{KH}$  eine  $G_\delta$ -Menge in  $\overline{KH}$  und deswegen  $\text{Ex } H$  eine  $G_\delta$ -Menge in  $H$ .

4. Nach Satz 3.2 gibt es  $p \in \mathcal{M}_1^+(\text{Ex } H_0)$  mit  $\mu = R(p)$ . Dessen triviale Fortsetzung auf  $\mathcal{M}(\text{Ex } H)$  erfüllt die Forderungen von 3.4.

□

Bemerkung: Zum Beweis von Satz 3.4 ist Satz 3.2 nicht erforderlich. Man verschafft sich das darstellende Maß leicht mit Hilfe der Abbildung  $\kappa$  und dem Satz von Choquet.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann es zu  $\mu \in H$  ein eindeutig bestimmtes Maß  $p \in M_1^+(\mathcal{M}(\text{Ex}H))$  mit  $\mu = R(p)$  gibt. Selbst bei kompaktem - nicht  $\mu$ -metrisierbarem Grundraum stößt die Beantwortung auf Schwierigkeiten, zumindest wenn man versucht, die klassischen Eindeutigkeitssätze unmittelbar auf die vorliegende Situation zu übertragen. Es wäre zu beweisen, daß aus der Gültigkeit der klassischen Eindeutigkeitsaussage die eindeutige Existenz von  $p \in M_1^+(\mathcal{M}(H))$  mit  $p^*(\text{Ex}H) = 1$  und  $\mu = R(p)$  folgt. Dies ist mir nicht gelungen. Grundsätzlich anders verhält es sich, wenn zu  $\mu \in H$  der Grundraum  $(Y, \mathcal{A})$  dem Maß nach metrisierbar ist. Dann kann in den Beweisen das Kompaktum  $(Y_2, \mathcal{A}_2)$  metrisierbar gewählt werden. Zum einen ist dann  $\mathcal{L}(H_2) = \mathcal{M}(H_2)$  - und damit  $M^+(\mathcal{M}(H_2)) = \mathcal{M}^+(H_2)$  -, zum anderen  $\text{Ex}H_2$  Borelsch - die maximalen Maße sind also genau die auf den Extrempunkten konzentrierten. Die Schwierigkeiten entfallen, und mit den zur Verfügung stehenden Mitteln können Eindeutigkeitsfragen behandelt werden.

In §4 wird die Frage der Eindeutigkeit bei beliebigem Grundraum wieder aufgegriffen und in einer zum klassischen Satz analogen Weise beantwortet.

Schon in 1.10 wurde folgendes festgestellt:

Der Raum  $\mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}^+(Y) - \mathcal{M}^+(Y)$  kann so in einen linearen Raum eingebettet werden, daß er auf einer Hyperebene liegt, welche den Ursprung nicht trifft, etwa mit Hilfe der Abbildung

$$\Phi : \mathcal{M}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(Y) \times \mathbb{R}, \quad \nu \longmapsto (\nu, 1).$$

Der Kegel  $\mathbb{R}^+ \Phi H$  definiert dann die natürliche (mit der linearen Struktur verträgliche) Halbordnung " $\leq$ ".  $\mu \in H$  hat die Verbandseigenschaft, wenn  $[0, (\mu, 1)]_{\mathbb{R}^+ \Phi H}$  (versehen mit der Einschränkung dieser Halbordnung) ein Verband ist.

Bemerkung: Häufig ist  $H$  eine Basis des Kegels  $\mathbb{R}^+ H$  - zu jedem  $\mu \in \mathbb{R}^+ H$  gibt es also eindeutig  $a \in \mathbb{R}^+$  und  $\nu \in H$  mit  $\mu = a \cdot \nu$  (vgl. 1.8). In diesem Fall definiert der Kegel auf sich die natürliche Halbordnung.  $\mu \in H$  hat die Verbandseigenschaft genau dann, wenn  $[0, \mu]_{\mathbb{R}^+ H}$  ein Verband ist. Die Abbildung  $\Phi' : \mathbb{R}^+ H \longrightarrow \mathbb{R}^+(H \times \{1\})$ , welche jedem Element  $a \cdot \nu$  mit  $a \in \mathbb{R}^+$  und  $\nu \in H$  das Element  $\Phi(a \cdot \nu) := (a \cdot \nu, a)$  zuordnet, ist nämlich bijektiv und ordnungstreu.

Dieser Fall tritt etwa ein, wenn  $H$  enthalten ist in einer Menge des Typs  $\{\nu \in \mathcal{M}^+(Y) : \nu(f) = a\}$  mit  $f \in \mathcal{B}(Y)$ ,  $f > 0$  und  $a \neq 0$ .  $\mathcal{M}_1^+(Y)$  ist zum Beispiel eine solche Menge.

Der folgende "individuelle" Eindeutigkeitsatz entspricht dem Satz von Loomis (vgl. 1.9 und 1.11).

### 3.5 Satz:

Für  $\mu \in H$  sei  $Y$  dem Maß nach metrisierbar.

Dann gibt es genau dann ein eindeutig bestimmtes Maß  $p \in M_1^+(\mathcal{M}(\text{ExH}))$ , welches  $\mu$  repräsentiert, wenn  $\mu$  die Verbandseigenschaft hat.

Bemerkung: Das Maß  $p$  ist die kanonische Fortsetzung auf  $\mathcal{M}(\text{ExH})$  des nach Satz 3.2 existierenden straffen Maßes auf  $\mathcal{U}(\text{ExH}_0)$ , welches  $\mu$  repräsentiert.

Wir formulieren den ersten Teil des Beweises als Lemma, da er in §4 noch einmal gebraucht wird.

### 3.6 Lemma:

Es seien die Voraussetzungen von Lemma 2.6 erfüllt und

$\mu \in \mathcal{M}_1^+(Y, \mathcal{U})$ . Ferner seien

$$\Phi: \mathcal{M}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(Y) \times \mathbb{R}, \quad \nu \longmapsto (\nu, 1),$$

$$\Psi: \mathcal{M}(Y_2) \longrightarrow \mathcal{M}(Y_2) \times \mathbb{R}, \quad \nu \longmapsto (\nu, 1).$$

Dann ist  $[0, \Phi\mu]_{\mathbb{R}^+\Phi H}$  genau dann ein Verband, wenn  $[0, \Psi(\iota\mu)]_{\mathbb{R}^+\Psi H_2}$  ein Verband ist.

Beweis:

1. Das Ordnungsintervall  $[0, \Phi\mu]_{\mathbb{R}^+\Phi H}$  ist genau dann ein Verband, wenn  $[0, \Phi\mu]_{\mathbb{R}^+\Phi H_0}$  einer ist. Dasselbe gilt für  $[0, \Psi(\iota\mu)]_{\mathbb{R}^+\Psi H_2}$  und  $[0, \Psi(\iota\mu)]_{\mathbb{R}^+\Psi H_2}$ .

Wir beweisen die erste Behauptung:

Für ein Element  $(\alpha\nu, \alpha) \in \mathbb{R}^+\Phi H$  mit  $(\mu, 1) - (\alpha\nu, \alpha) \in \mathbb{R}^+\Phi H$  gilt, daß  $\mu \geq \alpha\nu$ , also  $\nu(Y \setminus Y_1) = 0$  und damit  $(\alpha\nu, \alpha) \in \mathbb{R}^+\Phi H_0$  ist.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß die beiden Mengen gleich sind, und daß die Kegel  $\mathbb{R}^+ \Phi H$  und  $\mathbb{R}^+ \Phi H_0$  dieselbe Halbordnung darauf induzieren.

Der zweite Teil der Behauptung folgt analog.

2. Zur Abbildung  $\iota$  definieren wir entsprechend die Abbildung

$$\tilde{\iota} : \mathbb{R}^+ \Phi H_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \Psi H_2, \quad \tilde{\iota}(a\nu, a) := a \cdot \Psi(\iota\nu) \text{ für } a \in \mathbb{R}^+ \text{ und } \nu \in H_0.$$

Es ist  $\tilde{\iota}(a\nu, a) = (a \cdot \iota\nu, a)$ . Weil  $\iota$  bijektiv ist, ist auch  $\tilde{\iota}$  bijektiv.  $\tilde{\iota}$  erhält außerdem die lineare Struktur und somit auch die von  $\mathbb{R}^+ \Phi H_0$  und  $\mathbb{R}^+ \Psi H_2$  definierten Halbordnungen, d.h.  $\tilde{\iota}$  ist ein Ordnungsisomorphismus.

3. Die Kombination von 1. und 2. ergibt die Behauptung.

□

Beweis von Satz 3.5:

Zu  $\mu \in H$  sei die Folge  $(K_n : n \in \mathbb{N})$  gemäß Lemma 3.1.b. gewählt und  $(Y_2, \gamma_2)$  metrisierbar.

1. Nach 3.3.a. ist  $\bar{H}_2$  metrisierbar. Nach 1.6 ist  $\text{Ex}\bar{H}_2 \in \mathcal{L}(\bar{H}_2)$  und ein Maß  $\bar{p} \in \mathcal{M}_1^+(\bar{H}_2)$  genau dann maximal, wenn  $\bar{p}(\text{Ex}\bar{H}_2) = 1$  ist. Gilt noch  $\mu = R(\bar{p})$ , so ist das äquivalent mit  $\bar{p}(\text{Ex}H_2) = 1$ , denn es ist  $\text{Ex}H_2 = H_2 \cap \text{Ex}\bar{H}_2$  nach 2.6.f..

Weil  $\text{Ex}H_2$  metrisierbar ist, gilt nach [HJ], IV.4.A., daß

$\mathcal{M}_1^+(\mathcal{L}(\text{Ex}H_2)) = \mathcal{M}_1^+(\text{Ex}H_2)$  ist, und weil nach 3.3.c.

$\mathcal{L}(\text{Ex}H_2) = \mathcal{M}(\text{Ex}H_2)$  gilt, ist

$$\mathcal{M}_1^+(\mathcal{M}(\text{Ex}H_2)) = \mathcal{M}_1^+(\text{Ex}H_2).$$

Damit können wir aus dem Eindeutigkeitssatz 1.11 folgern:

Genau dann gibt es zu  $\mu$  ein eindeutig bestimmtes  $\bar{p} \in M_1^+(\mathcal{M}(\text{ExH}_2))$  mit  $\mu = R(\bar{p})$ , wenn  $\mu$  die Verbandseigenschaft hat.

2. Für jedes  $p \in M_1^+(\mathcal{M}(\text{ExH}))$  mit  $\mu = R(p)$  ist  $p(\text{ExH}_0) = 1$ . Definiert man zu jedem solchen Maß auf  $\mathcal{M}(\text{ExH}_2)$  das Maß  $q'p$  durch

$$q'p(B) := p(\mathcal{L}^{-1}(B)) \text{ für jedes } B \in \mathcal{M}(\text{ExH}_2),$$

was wegen  $\mathcal{M}(\text{ExH}_2) = \mathcal{L}\mathcal{M}(\text{ExH}_0)$  möglich ist, so ist wegen 2.6.a.

$\mu = R(p)$  genau dann, wenn  $\mu = q'p$  ist. Außerdem ist diese Zuordnung offensichtlich bijektiv. Es ist also  $p \in M_1^+(\mathcal{M}(\text{ExH}))$  mit  $\mu = R(p)$  genau dann eindeutig bestimmt, wenn

$q \in M_1^+(\mathcal{M}(\text{ExH}_2))$  mit  $\mu = R(q)$  eindeutig bestimmt ist, also nach der Aussage in 1.  $\mu$  die Verbandseigenschaft hat. Das ist nach Lemma 3.6 genau dann der Fall, wenn  $\mu$  sie hat.

Damit ist der Satz 3.5 bewiesen.

□

#### §4. Die Halbordnung " $\prec$ " und ihre Beziehung zur Eindeutigkeit der Integraldarstellung bei beliebigem Grundraum

Bevor wir uns der Untersuchung der Eindeutigkeit der Integraldarstellung bei beliebigem Grundraum  $(Y, \mathcal{I})$  zuwenden, erinnern wir uns an die klassische Situation.

Loomis und Choquet-Bishop-de Leeuw beweisen Eindeutigkeitsaussagen in der Menge  $\mathcal{M}^+(K)$  der maximalen Maße über dem konvexen Kompaktum  $K$ . Ist  $(Y, \mathcal{I})$  kompakt, befinden wir uns in dieser Situation und haben die dort benutzten Begriffe zur Verfügung. Bei beliebigem Grundraum ist das nicht mehr der Fall. Hierfür werden analoge Begriffsbildungen bereitgestellt.

Es sei also in diesem Paragraphen  $(Y, \mathcal{I})$  ein beliebiger topologischer Raum und  $H \subset \mathcal{M}^+(Y)$  nichtleer, konvex, schwach abgeschlossen und beschränkt. Die Relation " $\prec$ " - welche für kompaktes  $Y$  mit " $<$ " übereinstimmt - läßt sich auch hierfür erklären. Wir zeigen, daß sie - wenigstens auf einer wichtigen Teilmenge von  $\mathcal{M}^+(H)$  - eine Halbordnung ist. Wir übertragen dann einige einfache klassische Sätze für diese Halbordnung, um ihren Charakter zu illustrieren. Schließlich beweisen wir wieder einen individuellen und einen globalen Eindeutigkeitssatz. Ein Existenzsatz wird sich ebenfalls ergeben.

Die angestrebten Sätze ließen sich leicht beweisen, wenn Lemma 2.7.b. allgemein zur Verfügung stünde. Weil  $Y$  und damit  $H$  im allgemeinen nicht mehr kompakt ist, fehlt aber jetzt zum Beweis der Injektivität der Abbildung  $\mathcal{Q}$  der Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit eines Bairemaßes zu einem straffen

Maß. Das Umgehen dieser Schwierigkeit erfordert einen gewissen technischen Aufwand.

Für eine Folge  $(K_n: n \in \mathbb{N})$  paarweise disjunkter Kompakta in  $Y$  stehen die Definitionen aus §2 zur Verfügung, und es gilt folgende Ergänzung von Lemma 2.7:

#### 4.1 Lemma:

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Lemma 2.7 gilt für die Abbildung  $\varphi: \mathcal{M}_{H_0}^+(H) \longrightarrow \mathcal{M}_{H_2}^+(\bar{H}_2)$ :

a. Für  $\mu \in \mathbb{R}^+ H_0$  ist  $\mu = R(p)$  genau dann, wenn  $\mu = r(\varphi p)$  ist.

b.  $\varphi$  ist bijektiv, und es gilt für  $p, q \in \mathcal{M}_{H_0}^+(H)$   $p \triangleleft q$  genau dann, wenn  $\varphi p \triangleleft \varphi q$  ist.

Beweis:

I. Zunächst sei angenommen, daß  $\varphi$  injektiv ist.

Zum Beweis von a. wird ein Schluß wie im Beweis von Lemma 2.7.a. verwendet. Ist  $\varphi$  injektiv, so gilt für  $p \in \mathcal{M}_{H_0}^+(H)$  notwendig

$$(*) \quad \varphi p \mid \mathcal{M}_0(H_2) = (p \mid \mathcal{M}_0(H_0)) \cdot \iota^{-1}$$

wegen 2.6.g. und der Definition von  $\varphi$ .

Nach Lemma 2.6.a. ist  $Y_1 \cap \mathcal{L}(Y, \mathcal{V}) = Y_1 \cap \mathcal{L}(Y_2, \mathcal{V}_2) =: \mathcal{L}$ , und für  $\mu \in \mathbb{R}^+ H_0$  ist

$$\mu(B) = \iota \mu(B) \text{ für alle } B \in \mathcal{L}.$$

Weiter gilt nach 2.6.a. und (\*) für jedes  $B \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \int_H \nu(B) \, dp &= \int_{H_0} \nu(B) \, dp = \int_{H_0} \iota \nu(B) \, dp = \int_{H_2} \nu(B) \, d\varphi p = \\ &= \int_H \nu(B) \, d\varphi p \end{aligned}$$

Es ist  $\mu(Y \setminus Y_1) = \nu(Y_2 \setminus Y_1) = 0$ ; also gilt wegen der beiden letzten Beziehungen die Darstellungsformel (2.3) genau dann für  $\mu$  und  $p$ , wenn sie für  $\nu$  und  $\varphi p$  gilt. Da nach Satz 2.2  $\mu = R(\varphi p)$  äquivalent zu  $\nu = r(\varphi p)$  ist, ist a. bewiesen.

b. wurde bereits in 2.7.a. gezeigt.

II. Es bleibt die Injektivität von  $\varphi$  zu beweisen.

Nach (2.9) ist die Abbildung

$$\iota_1 : \mathcal{M}_{Y_1}^+(Y, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{M}^+(Y_1, Y_1 \cap \mathcal{F}), \quad \nu \longmapsto \nu|_{\mathcal{L}(Y_1, Y_1 \cap \mathcal{F})}$$

ein Homöomorphismus.

Zwei Maße  $p, q \in \mathcal{M}_{H_0}^+(H)$  sind also genau dann gleich, wenn die Maße  $(p|_{\mathcal{L}(H_0)}) \circ \iota_1^{-1}$  und  $(q|_{\mathcal{L}(H_0)}) \circ \iota_1^{-1}$  gleich sind auf  $H_1 = \iota_1 H_0$ . Nach der Konstruktion von  $\varphi$  folgt aus  $\varphi p = \varphi q$ , daß bei

$$\mathcal{A}_0 := {}^B\{f' | H_0 : f \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{F}), f|_{K_n} \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{F}) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\}$$

$p|_{\mathcal{A}_0}$  und  $q|_{\mathcal{A}_0}$  übereinstimmen, also  $p|_{\mathcal{A}_0 \circ \iota_1^{-1}}$  und  $q|_{\mathcal{A}_0 \circ \iota_1^{-1}}$

bei  $\mathcal{F}_1 = Y_1 \cap \mathcal{F}$  auf

$$\mathcal{A}_1 := {}^B\{f' | H_1 : f \in \mathcal{B}(Y_1, \mathcal{F}_1), f|_{K_n} \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{F}_1) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\}.$$

Um  $p = q$  zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß ein Maß aus  $\mathcal{M}^+(H_1, \nu(H_1, \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{F}_1)))$  durch seine Werte auf  $\mathcal{A}_1$  eindeutig bestimmt ist. Das soll jetzt geschehen.

1. Um zu beweisen, daß  $m \in \mathcal{M}^+(H_1)$  durch seine Werte auf  $\mathcal{A}_1$  eindeutig bestimmt ist, geben wir eine Basis  $\mathcal{S}$  von  $\nu(H_1, \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{F}_1))$  an, welche in der  $\mathcal{C}$ -Algebra

$\mathcal{I} := \{D \in \mathcal{L}(H_1, \nu(H_1, \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{V}_1))) : \text{Es gibt } A \in \mathcal{A}_1 \text{ mit } m(A \Delta D) = 0\}$   
 enthalten ist  $(A \Delta D) = (A \setminus D) \cup (D \setminus A)$ .  $m$  wird dann auf  $\mathcal{I}$   
 durch seine Werte auf  $\mathcal{A}_1$  eindeutig bestimmt. Weil jedes  
 straffe Maß  $\tau$ -stetig ist, ist  $m$  also auch auf  $\nu(H_1, \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{V}_1))$   
 eindeutig bestimmt und somit auch auf ganz  $\mathcal{L}(H_1, \nu(H_1, \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{V}_1)))$ ,  
 weil die Topologie ein Erzeugendensystem für die Borel- $\sigma$ -  
 Algebra ist, welches gegen endliche Durchschnittsbildung ab-  
 geschlossen ist.

2. Es seien  $f \in \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{V}_1)$  und  $a \in \mathbb{R}^+$ , so daß  $|f(y)| \leq a$  für alle  
 $y \in Y$  ist, weiter für  $n \in \mathbb{N}$   $Y^n := \bigcup_{i=1}^n K_1$  und

$$f_n : Y_1 \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto f(y) \cdot \chi_{Y^n}(y) + a \cdot \chi_{Y_1 \setminus Y^n}(y).$$

Die Folge  $(f_n : n \in \mathbb{N})$  fällt monoton gegen  $f$  und liegt in  
 $\mathcal{F}(Y_1, \mathcal{V}_1)$ . Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ergibt  
 sich:

(\*)  $(f_n|_{H_1} : n \in \mathbb{N})$  fällt monoton gegen  $f|_{H_1}$ .

3. Es seien

$$\mathcal{G}_n := \{g \in \mathcal{C}(Y^n, Y^n \cap \mathcal{V}_1) : -a \leq g \leq f|_{Y^n}\}$$

und für  $g \in \mathcal{G}_n$

$$\tilde{g} : Y_1 \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto g(y) \cdot \chi_{Y^n}(y) + a \cdot \chi_{Y_1 \setminus Y^n}(y).$$

Dann ist  $\tilde{g} \in \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{V}_1)$  und für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $K_n \in \mathcal{C}(K_n, K_n \cap \mathcal{V}_1)$ .

Ferner konvergiert das Netz  $(\tilde{g} : g \in \mathcal{G}_n)$  nach oben filtrierend  
 gegen  $f_n$ . Weil die Elemente von  $H_1$   $\tau$ -stetig sind, gilt:

Jedes  $\tilde{g}'|_{H_1}$  ist  $\mathcal{A}_1$ -meßbar, aus  $\mathcal{F}(H_1, \nu(H_1, \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{Y}_1)))$  (\*\*\*) und das Netz  $(\tilde{g}'|_{H_1} : g \in \mathcal{G}_n)$  konvergiert nach oben filtrierend gegen  $f'_n|_{H_1}$ .

4. Wegen (\*\*\*) ist für  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{\nu \in H_1 : f'_n(\nu) > \alpha\} = \bigcup_{g \in \mathcal{G}_n} \{\nu \in H_1 : \tilde{g}'(\nu) > \alpha\},$$

also Vereinigung eines aufsteigend filtrierenden Systems  $\nu(H_1, \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{Y}_1))$ -offener Mengen aus  $\mathcal{A}_1$  und wegen der  $\tau$ -Stetigkeit von  $m$  selbst aus  $\mathcal{J}$ . Die gesamte Initial- $\mathcal{G}$ -Algebra  $(f'_n|_{H_1})^{-1}(\mathcal{G}_1)$  ist also in  $\mathcal{J}$  enthalten.

5.  $\mathcal{S}$  sei diejenige Basis von  $\nu(H_1, \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{Y}_1))$ , welche aus den endlichen Durchschnitten von Mengen der Gestalt

$\{\nu \in H_1 : f'(\nu) > \alpha\}$  mit  $f \in \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{Y}_1)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  besteht. Es ist

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{B}\{f'|_{H_1} : f \in \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{Y}_1)\}.$$

Um zu zeigen, daß die letztere  $\mathcal{G}$ -Algebra in  $\mathcal{J}$  enthalten ist, beweisen wir dies für ein Erzeugendensystem, nämlich die Mengen der Gestalt  $\{\nu \in H_1 : f'(\alpha) < \alpha\}$  mit  $f \in \mathcal{F}(Y_1, \mathcal{Y}_1)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Nach (\*) ist

$$\{\nu \in H_1 : f'(\nu) < \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\nu \in H_1 : f'_n(\nu) < \alpha\},$$

also nach 4. Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Mengen aus  $\mathcal{J}$  und deshalb selbst aus  $\mathcal{J}$ .

Damit ist der Beweis von Lemma 4.1 vollständig.

□

Im folgenden werden diejenigen Maße wichtig sein, welche Resultanten haben.

$$\mathcal{M}^R(H) := \{p \in \mathcal{M}^+(H) : \text{Es gibt } \mu \in \mathcal{M}^+(Y) \text{ mit } \mu = R(p)\}.$$

Die Elemente dieser Menge lassen sich leicht kennzeichnen.

#### 4.2 Satz:

Für  $p \in \mathcal{M}^+(H)$  sind äquivalent:

a.  $p \in \mathcal{M}^R(H)$ .

b. Es gibt eine Folge paarweise disjunkter Kompakta

$(K_n : n \in \mathbb{N})$  in  $Y$ , so daß  $p(\{v \in H : v(Y \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) > 0\}) = 0$  ist.

Außerdem ist  $H$  maßkonvex:

Für  $p \in \mathcal{M}_1^R(H)$  ist  $R(p) \in H$ .

**Beweis:**

Hat  $p$  eine Resultante, so gibt es eine Folge  $(K_n : n \in \mathbb{N})$  paarweise disjunkter Kompakta mit  $R(p)(Y \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) = 0$ , woraus die Behauptung mit 2.5.a. folgt.

Ist b. richtig, so ist  $p \in \mathcal{M}_{H_0}^+(H)$ .  $\varphi p$  hat eine Resultante  $\bar{\mu}$  in  $\mathbb{R}^+ H_2$ , welche wegen  $\varphi p(H_2) = \varphi p(H_2)$  in  $\mathbb{R}^+ H_2$  liegt.

$\iota^{-1} \bar{\mu} \in \mathbb{R}^+ H_0$  ist Resultante von  $p$  nach Lemma 4.1.a..

Ist  $p \in \mathcal{M}_1^R(H)$ , so liegt  $R(\varphi p)$  in  $H_2$  und deshalb

$R(p) = \iota^{-1} R(\varphi p)$  in  $H_0$ .

□

Bemerkung: Wir geben zwei Bedingungen an, unter denen stets  $\mathcal{M}^R(H) = \mathcal{M}^+(H)$  ist. Zu diesem Zweck zeichnen wir eine wichtige Klasse von Räumen aus:

a. Ein vollständig regulärer Raum  $(Y, \mathcal{T})$  heißt Prohorov-Raum, wenn in  $\mathcal{M}^+(Y)$  der Satz von Prohorov gilt, d.h. wenn folgende Bedingungen äquivalent sind:

- i.  $M \subset \mathcal{M}^+(Y)$  ist relativkompakt.
- ii.  $M$  ist beschränkt und gleichmäßig straff, d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein Kompaktum  $K \subset Y$ , so daß  $\nu(Y \setminus K) < \varepsilon$  ist für alle  $\nu \in M$ .

Diese Räume werden in [T02] ausführlich behandelt. Jeder lokal-kompakte Raum zählt dazu, ferner jede  $G_\delta$ -Menge eines Prohorov-Raumes, insbesondere also jeder Polnische Raum.

b. Die oben erwähnte Aussage lautet:

Ist  $(Y, \mathcal{T})$  homöomorph zu einer Borelschen Teilmenge eines kompakten Raumes oder ein Prohorov-Raum, so ist  $\mathcal{M}^+(H) = \mathcal{M}^R(H)$ .

Beweis:

1. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  kompakt und  $Y \in \mathcal{L}(X, \mathcal{T})$ . Nach (2.9) ist die Abbildung  $\kappa$ , welche jedem  $\mu \in \mathcal{M}^+(Y)$  sein Bildmaß unter der Injektion  $Y \hookrightarrow X$  zuordnet, ein Homöomorphismus auf  $\mathcal{M}_Y^+(X)$ . Ist  $p \in \mathcal{M}^+(H)$ , so ist

$$q : \mathcal{L}(\overline{\kappa H}) \longrightarrow \mathbb{R}^+, A \longmapsto p(H \cap \kappa^{-1}(A))$$

aus  $\mathcal{M}^+(\overline{\kappa H})$ . Weil  $\kappa H = \mathcal{M}_Y^+(X) \cap \overline{\kappa H}$  ist, liegt  $R(q)$  in  $\mathbb{R}^+ \kappa H$  und  $\kappa^{-1}(R(q))$  ist Resultante von  $p$ .

2. Nun sei  $(Y, \mathcal{T})$  ein Prohorov-Raum und  $p \in \mathcal{M}_1^+(H)$ . Weil  $p$  straff ist, gibt es eine aufsteigende Folge

$(H^n : n \in \mathbb{N})$  von Kompakta in  $H$ , so daß bei  $H' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H^n$

$p(H') = 1$  ist.

Nach Voraussetzung gibt es zu  $H^n$  ein Kompaktum  $Y^n \subset Y$ , so daß  $\nu(Y \setminus Y^n) < \frac{1}{n}$  ist für jedes  $\nu \in H^n$ . Bei  $Y' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y^n$  ist  $H' \subset \{\nu \in H: \nu(Y \setminus Y') = 0\} = H \cap \mathcal{K}_Y^+(Y)$  und somit  $p(H \cap \mathcal{K}_Y^+(Y)) = 1$ . Man bettet nun  $Y'$  in ein Kompaktum  $X$  ein. Dort ist es als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen Borelsch, und man verschafft sich  $R(p) \in H$  wie in 1..

□

#### 4.3 Satz:

Auf  $\mathcal{K}^{R(H)}$  ist " $\prec$ " eine Halbordnung.

Beweis:

Der Nachweis von Reflexivität und Transitivität erübrigt sich.

Es bleibt die Antisymmetrie zu beweisen.

Sind  $p$  und  $q$  aus  $\mathcal{K}^{R(H)}$ , so gibt es eine Folge paarweise disjunkter Kompakta  $(K_n: n \in \mathbb{N})$  in  $Y$ , so daß (bei  $Y_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ ) gilt

$$R(p)(Y \setminus Y_1) = R(q)(Y \setminus Y_1) = 0.$$

Also sind  $p$  und  $q$  aus  $\mathcal{K}_{H_0}^+$ . Aus  $p \prec q$  und  $q \prec p$  folgt nach 4.1.b.

$\varphi p \prec \varphi q$  und  $\varphi q \prec \varphi p$ .

Da " $\prec$ " eine Halbordnung ist, gilt  $\varphi q = \varphi p$  und weil  $\varphi$  nach 4.1 bijektiv ist auch  $p = q$ .

□

Die Halbordnung " $\prec$ " wird - wie in der klassischen Situation die Halbordnung " $\prec$ " - von einem Kegel konvexer Funktionen erzeugt. Es liegt also auch dafür die Interpretation nahe, daß für  $p \prec q$  die Masse von  $q$  "stärker auf dem Extremalrand

von  $H$  konzentriert ist", als die von  $p$ . Diese Vorstellung wird durch die Sätze 4.4 und 4.5 unterstützt.

#### 4.4 Satz:

Für  $p, q \in \mathcal{M}^{R(H)}$  gilt:

- a. Ist  $p \prec q$ , so ist  $R(p) = R(q)$  und  $p(H) = q(H)$ .
- b. Ist  $\mu = R(p)$ , so gilt  $\varepsilon_\mu \prec p$ .
- c. Genau dann wird  $\mu \in H$  nur von  $\varepsilon_\mu$  repräsentiert, wenn  $\mu$  ein Extrempunkt ist.

Beweis:

a. Zu  $p$  und  $q$  gibt es wieder eine Folge paarweise disjunkter Kompakta  $K_n$  in  $Y$ , so daß bei  $Y_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  gilt

$$R(p)(Y \setminus Y_1) = R(q)(Y \setminus Y_1) = 0.$$

Weil  $\varphi p \prec \varphi q$  ist, gilt nach 1.4  $\varphi p(\bar{H}_2) = \varphi q(\bar{H}_2)$  und  $R(\varphi p) = R(\varphi q)$  und deshalb mit Lemma 4.1 die Behauptung.

b. und c. Zu  $\mu$  gibt es  $Y_1$  wie oben mit

$$\mu(Y \setminus Y_1) = 0.$$

Ist  $\mu = R(p)$ , so gilt  $\mu = R(\varphi p)$  nach 4.1 und deshalb nach 1.4  $\varepsilon_\mu \prec \varphi p$  und damit wieder b.. Ferner wird nach 1.4 das Maß  $\mu$  genau dann nur von  $\varepsilon_\mu$  repräsentiert, wenn  $\mu \in \text{Ex} \bar{H}_2$  ist. Wegen  $\text{Ex} H_2 = H_2 \cap \text{Ex} \bar{H}_2$  ist das aber genau dann der Fall, wenn  $\mu \in \text{Ex} H_2$  ist, also  $\mu \in \text{Ex} H_0 \subset \text{Ex} H$  (vgl 2.6.b).  
□

Bemerkung: a. In der klassischen Situation verschwindet jedes maximale Maß auf den zu den Extrempunkten disjunkten Baire-mengen und auf den Randmengen. Für ein bezüglich " $\prec$ " maximales

Maß  $p \in \mathcal{M}^{R(H)}$  gilt:

$$(p|_{\mathcal{M}(H)})^*(\text{Ex}H) = p(H).$$

Die Beweisidee ist die folgende:

$A \in \mathcal{M}(H)$  liegt in einer Teil- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{M}(H)$ , welche von den Auswertungsfunktionalen zu einer abzählbaren Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(Y)$  erzeugt wird. Dazu konstruiert man  $(Y_2, \mathcal{F}_2)$  wie in Punkt I.2. des Beweises zu Satz 2.4 (Seite 23).  $\mathcal{P} p \in \mathcal{M}^+(\overline{H}_2)$  ist dann maximal im klassischen Sinne nach 4.1; aus der Konstruktion von  $(Y_2, \mathcal{F}_2)$  folgt  $\nu(A \cap H_0) \in \mathcal{G}_0(\overline{H}_2)$  und  $\nu(A \cap H_0) \cap \text{Ex}\overline{H}_2 = \emptyset$ , wenn  $A \cap \text{Ex}H = \emptyset$  war. Deshalb ist  $\mathcal{P} p(A \cap H_0) = 0$ , woraus  $p(A) = 0$  folgt.

b. In der klassischen Situation folgt aus dem Verschwinden eines Maßes auf den Randmengen die Maximalität (vgl. 1.5). Sie folgt jedoch nicht unbedingt, wenn das Maß auf den zu den Extrempunkten disjunkten Bairemengen verschwindet (vgl. 1.4). Es ist mir nicht bekannt, ob es zu jedem  $q \in \mathcal{M}^+(\mathcal{M}(H))$  mit Resultante in  $H$  und  $q^*(\text{Ex}H) = q(H)$  ein maximales  $p \in \mathcal{M}^+(H)$  gibt, so daß  $p|_{\mathcal{M}(H)} = q$  ist.

Unter den Metrisierbarkeitsforderungen aus §3 läßt sich leicht die Beziehung zu den dortigen Sätzen herstellen.

#### 4.5 Satz:

Es sei  $\mu \in H$  und  $Y$   $\mu$ -metrisierbar.  $(K_n: n \in \mathbb{N})$  sei die gemäß Lemma 3.1 existierende Folge von Kompakta. Dann gilt:  
 $p \in \mathcal{M}_1^+(H)$  mit  $\mu = R(p)$  ist genau dann maximal, wenn  
 $p(\{\nu \in \text{Ex}H: \nu(Y \setminus Y_1) = 0\}) = 1$  ist.

Beweis:

Es sei  $(Y_2, \mathcal{T}_2)$  der kompakte metrisierbare Raum gemäß Lemma 3.1. Nach Lemma 3.3.b. ist  $\text{Ex}H_2 \in \mathcal{M}(H_2)$  und nach 2.6.b. und g.  $\text{Ex}H_Q = \mathcal{L}^{-1}(\text{Ex}H_2) \in \mathcal{M}(H)$ .

Ist  $p$  maximal, so auch  $\varphi p$ . Deshalb ist nach 1.6

$$\varphi p(\text{Ex}H_2) = \varphi p(\text{Ex}\overline{H}_2) = 1$$

und somit

$$p(\{v \in \text{Ex}H: v(Y \setminus Y_1) = 0\}) = p(\text{Ex}H_0) = \varphi p(\text{Ex}H_2) = 1.$$

Ist umgekehrt  $p(\{v \in \text{Ex}H: v(Y \setminus Y_1) = 0\}) = 1$ , so ist  $\varphi p(\text{Ex}\overline{H}_2) = 1$ .  $\varphi p$  ist also maximal und deshalb auch  $p$ .

□

Der Darstellungssatz lautet:

#### 4.6 Satz:

Zu jedem  $\mu \in H$  gibt es ein normiertes, bezüglich " $\mathcal{L}$ " maximales Maß  $p \in \mathcal{M}^R(H)$ , welches  $\mu$  repräsentiert.

Beweis:

Zu  $\mu$  sei  $(K_n: n \in \mathbb{N})$  die Folge paarweise disjunkter Kompakta mit  $\mu(Y \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) = 0$ . Dann gibt es zu  $\mu$  ein maximales darstellendes Maß  $q \in \mathcal{M}^+(\overline{H}_2)$ . Weil  $\mu \in H_2$  ist, ist  $q \in \mathcal{M}_{H_2}^+(\overline{H}_2)$  (vgl. Lemma 2.5). Deshalb existiert  $\varphi^{-1}q \in \mathcal{M}_{H_2}^+(H)$ , ist maximal und repräsentiert  $\mu$  nach Lemma 4.1.

□

Bemerkung: Satz 2.4 kann hieraus als Korollar bewiesen werden.

Es gilt auch der individuelle Eindeutigkeitssatz.

#### 4.7 Satz:

Zu  $\mu \in H$  gibt es genau dann ein eindeutig bestimmtes, bezüglich " $\prec$ " maximales Maß in  $\mathcal{M}_1^R(H)$ , welches  $\mu$  repräsentiert, wenn  $\mu$  die Verbandseigenschaft hat.

Beweis:

Aus Lemma 3.6 folgt, daß  $\mu$  genau dann die Verbandseigenschaft hat, wenn  $\mu \in \bar{H}_2$  sie hat. Genau dann gibt es ein eindeutig bestimmtes maximales  $q \in \mathcal{M}_1^+(\bar{H}_2)$ , welches  $\mu$  repräsentiert (1.11). Weil  $q \in \mathcal{M}_{H_2}^+(\bar{H}_2)$  ist, ist das nach 4.1 äquivalent dazu, daß  $p := \varphi^{-1}_q$  das eindeutig bestimmte maximale Maß aus  $\mathcal{M}_1^R(H)$  ist, welches  $\mu$  repräsentiert.

□

Entsprechend wird gekennzeichnet, wann  $H$  ein Simplex ist.

#### 4.8 Satz:

$H$  ist genau dann ein Simplex, wenn es zu jedem  $\mu \in H$  ein eindeutig bestimmtes maximales Maß  $p \in \mathcal{M}_1^+(H)$  gibt, welches  $\mu$  repräsentiert.

Beweis:

Der Satz folgt aus Satz 4.7, weil nach Lemma 1.12  $H$  genau dann ein Simplex ist, wenn jedes  $\mu \in H$  die Verbandseigenschaft hat.

□

## §5. Ein Anwendungsbeispiel

### Invariante und ergodische Maße

Dieser Abschnitt behandelt die Integraldarstellung invarianter Maße mit Hilfe ergodischer. Sowohl die Repräsentationssätze als auch Eindeutigkeitssätze finden Anwendung.

$(Y, \mathcal{Y})$  sei ein beliebiger topologischer Raum. Eine positiv-lineare und bezüglich der schwachen Topologie stetige Abbildung  $T$  von  $\mathcal{M}^+(Y)$  nach  $\mathcal{M}^+(Y)$  heißt positive Diffusion. Sie ist konservativ (expansiv, kontraktiv), wenn für alle  $\mu \in \mathcal{M}^+(Y)$  gilt:  $T\mu(Y) = \mu(Y)$  ( $T\mu(Y) \geq \mu(Y)$ ,  $T\mu(Y) \leq \mu(Y)$ ).

Bemerkung: Diese Definition ist allgemeiner als die in [CH], §14 angegebene und die in [CH], §31 benutzte.

Es sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von positiven Diffusionen. Ein Maß  $\mu \in \mathcal{M}^+(Y)$  heißt  $(\mathcal{F} -)$  invariant, wenn für alle  $T \in \mathcal{F}$   $T\mu = \mu$  ist.  $\mathcal{P}$  sei die Menge der invarianten Maße in  $\mathcal{M}^+(Y)$  und  $\mathcal{P}_1 := \mathcal{P} \cap \mathcal{M}_1^+(Y)$ . Die Menge  $\mathcal{P}_1$  ist konvex; ihre Extrempunkte heißen ergodische Maße. Die Menge der ergodischen Maße wird mit  $\mathcal{E}$  bezeichnet.

Häufig rühren positive Diffusionen von Punktabbildungen her:

#### 5.1 Satz:

Es sei  $f : Y \longrightarrow Y$  eine  $\mathcal{Y} - \mathcal{Y}$ -stetige Abbildung. Dann wird durch die Festsetzung

$$T_f : \mathcal{M}^+(Y) \longrightarrow \mathcal{M}^+(Y), \mu \longmapsto \mu \circ f^{-1}$$

eine konservative positive Diffusion definiert.

Beweis:

Triviale Folgerung aus der Definition der schwachen Topologie.

□

Wird die Familie  $\mathcal{F}$  von positiven Diffusionen wie in Satz 5.1 von Punktabbildungen erzeugt, so können die ergodischen Maße charakterisiert werden. Ist  $\mathcal{F}'$  eine Familie von  $\mathcal{L}(Y) - \mathcal{L}(Y)$ -meßbaren Abbildungen von  $Y$  nach  $Y$ , so wird zu  $\mu \in \mathcal{M}^+(Y)$  die Menge  $\mathcal{F}_\mu$  der  $\mu$ -invarianten Teilmengen von  $Y$  definiert:

$$\mathcal{F}_\mu := \{A \in \mathcal{L}(Y) : \mu(A \Delta f^{-1}(A)) = 0 \text{ für jedes } f \in \mathcal{F}'\}.$$

## 5.2 Satz:

Es sei die Familie  $\mathcal{F}$  von positiven Diffusionen wie in Satz 5.1 durch eine Familie  $\mathcal{F}'$  stetiger Abbildungen erzeugt. Dann gilt:

$$\mathcal{E} = \{\mu \in \mathcal{P}_1 : \text{für jedes } A \in \mathcal{F}_\mu \text{ ist } \mu(A) = 0 \text{ oder } \mu(A) = 1\}.$$

Der Beweis steht bei [PH], S.81.

Bemerkung: Der Satz gilt sinngemäß für  $\mathcal{L}(Y) - \mathcal{L}(Y)$ -meßbare Abbildungen.

Die Anwendung der bewiesenen Repräsentationssätze wird durch folgende Feststellung ermöglicht:

## 5.3 Satz:

$\mathcal{P}_1$  ist (konvex und) schwach abgeschlossen.

Beweis:  $\mathcal{P}_1$  ist die Menge der gemeinsamen Fixpunkte der stetigen Abbildungen  $T \in \mathcal{F}$  in  $\mathcal{M}_1^+(Y)$ .

□

Damit folgt z.B. aus Satz 2.4 und aus Korollar 2.9:

#### 5.4 Satz:

Es sei  $\mathcal{F}$  eine Familie positiver Diffusionen. Dann gilt:  
Ist  $\mu \in \mathcal{M}_1^+(Y)$   $\mathcal{F}$ -invariant, dann gibt es ein normiertes Maß  $\nu$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}\{f|f \in \mathcal{B}(Y)\}$ , so daß für jedes  $A \in \mathcal{L}(Y)$  gilt:

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{E}} \nu(A) d\mu.$$

Wenn zu  $\mathcal{F}$  ein invariantes Maß existiert, dann existiert auch ein ergodisches.

Bemerkung: Es soll in dieser Arbeit nicht darauf eingegangen werden, wann  $\mathcal{F}$ -invariante Maße existieren.

Ebenso einfach folgt aus Satz 3.2:

#### 5.5 Satz:

Ist  $\mathcal{F}$  eine Familie positiver Diffusionen und  $Y$  für  $\mu \in \mathcal{P}_1$  dem Maß nach metrisierbar, so gibt es eine Teilmenge  $\mathcal{E}_\mu$  von  $\mathcal{E}$  und ein normiertes straffes Maß auf der Borel- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{E}_\mu$ , so daß für jedes  $A \in \mathcal{L}(Y)$  gilt:

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{E}_\mu} \nu(A) d\mu.$$

Für diese Situation gilt auch der Eindeutigkeitssatz. Wir geben vorher eine hinreichende Bedingung dafür an, daß  $\mathcal{P}$  ein Verband ist.

#### 5.6 Satz:

Ist  $\mathcal{F}$  eine Familie von positiven Diffusionen, welche entweder sämtlich kontraktiv oder sämtlich expansiv sind, dann ist  $\mathcal{P}$  ein Verband in seiner eigenen Ordnung.

Beweis:

Der entsprechende Teil des Beweises zu [CH], 31.3 ist wörtlich übertragbar.

□

Aus der Bemerkung auf Seite 47 folgt, daß  $\mathcal{P}_1$  dann ein Simplex ist, und aus Satz 3.5 ergibt sich:

### 5.7 Satz:

Ist  $\mathcal{F}$  eine Familie positiver Diffusionen, welche entweder sämtlich kontraktiv oder sämtlich expansiv sind, und ist  $Y$  für  $\mu \in \mathcal{P}_1$  dem Maß nach metrisierbar, so gilt:

Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Maß  $p$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}\{f' \in \mathcal{E} : f' \in \mathcal{B}(Y)\}$ , so daß für jedes  $A \in \mathcal{G}(Y)$  gilt:

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{E}} \nu(A) \, dp.$$

### 5.8 Korollar:

Ist die Familie  $\mathcal{F}$  von positiven Diffusionen wie in Satz 5.1 von einer Familie stetiger Abbildungen erzeugt, so gilt die Konklusion von Satz 5.7.

Bemerkung: Satz 5.7 enthält den entsprechenden Satz [CH], 31.3 als Spezialfall. Zu Korollar 5.8 vergleiche man [PH], S.82.

### Der Satz von de Finetti

Durch Spezialisierung der Ergebnisse über invariante Maße erhalten wir eine recht allgemeine Version des Satzes von de Finetti.

$(X, \mathcal{T})$  sei ein beliebiger topologischer Raum und  $(Y, \mathcal{F}) := (X, \mathcal{T})^{\mathbb{N}}$  sein abzählbares Produkt.  $\mathcal{T}$  sei die Menge der endlichen Koordinatenvertauschungen:

$$\mathcal{T} := \{T: Y \longrightarrow Y, (x_n: n \in \mathbb{N}) \longmapsto (x_{\phi(n)}: n \in \mathbb{N}): \phi \text{ ist Permutation von } \mathbb{N}, \text{ welche alle bis auf endlich viele Elemente fest läßt}\}.$$

Die Elemente von  $\mathcal{T}$  sind  $\mathcal{F}$ - $\mathcal{F}$ -stetig und erzeugen nach Satz 5.1 eine Familie konservativer Diffusionen. Ein Maß  $\mu \in \mathcal{M}_1^+(Y)$ , welches diesbezüglich invariant ist, d.h. für welches  $\mu = \mu \cdot T^{-1}$  für jedes  $T \in \mathcal{T}$  ist, heißt symmetrisch. In Anlehnung an [HS] bezeichnen wir die Menge dieser Maße mit  $\tilde{\mathcal{P}}$ . Die Menge  $\tilde{\mathcal{P}}$  ihrer Extrempunkte läßt sich nach [HS], 5.3 kennzeichnen.

#### 5.9 Satz:

$\tilde{\mathcal{P}}$  ist die Menge aller abzählbaren Produkte  $\tilde{\pi}$  auf  $\mathcal{L}(Y)$  von Maßen  $\pi \in \mathcal{M}_1^+(X)$ .

Bemerkung: Die symmetrischen Maße spielen bei der Grundlegung einer subjektivistischen Wahrscheinlichkeitstheorie eine Rolle. Literatur dazu wird in [HS] angegeben. Man vergleiche dazu auch [RI], Theorem B.

Satz 5.4 nimmt im vorliegenden Spezialfall die folgende Gestalt an:

### 5.10 Satz:

Zu jedem symmetrischen Maß  $\mu$  auf  $Y$  gibt es ein normiertes Maß  $p$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{P}}) = \mathcal{B}\{f: \tilde{\mathcal{P}} : f \in \mathcal{B}(Y)\}$ , so daß für jedes  $A \in \mathcal{G}(Y)$  gilt:

$$\mu(A) = \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \tilde{\pi}(A) \, dp.$$

Die Abbildung  $\pi \longrightarrow \tilde{\pi}$  von  $\mathcal{M}_1^+(X)$  auf  $\tilde{\mathcal{P}}$  ist bijektiv. Außerdem ist sie ein  $\sigma$ -Isomorphismus von  $\mathcal{M}(\mathcal{M}_1^+(X))$  auf  $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{P}})$  (d.h. sie ist operationstreu bezüglich der Bildung von Komplement und abzählbarer Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{M}(\mathcal{M}_1^+(X))$ ) nach [HS], 4.2. Deshalb läßt sich Satz 5.10 auch so formulieren:

### 5.11 Korollar:

Zu jedem symmetrischen Maß  $\mu$  auf  $Y$  gibt es ein normiertes Maß  $q$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}(\mathcal{M}_1^+(X))$ , so daß für jedes  $A \in \mathcal{G}(Y)$  gilt:

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{M}_1^+(X)} \tilde{\pi}(A) \, dq.$$

Bemerkung: a. Jedes symmetrische Maß  $\mu$  ist auch invariant gegen beliebige Koordinatenvertauschungen. Das folgt etwa aus dem Darstellungssatz 5.10:

Ist nämlich

$\mathcal{T}' := \{T: Y \longrightarrow Y, (x_n: n \in \mathbb{N}) \longmapsto (x_{\sigma(n)}: n \in \mathbb{N}): \sigma \text{ ist Permutation von } \mathbb{N}\}$ ,  
so gilt für jedes  $T \in \mathcal{T}'$ :

$$\tilde{\pi} \cdot T^{-1} = \tilde{\pi} \quad \text{für alle } \tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}}$$

und deshalb für jedes  $A \in \mathcal{G}(Y)$ :

$$\mu \circ T^{-1}(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \tilde{\pi}(T^{-1}(A)) \, d\mu = \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \tilde{\pi}(A) \, d\mu = \mu(A).$$

b. Korollar 5.11 wird in der Literatur als Satz von de Finetti bezeichnet. Die hier angegebene Version verallgemeinert das "fundamental theorem" 7.4 aus [HS], wo  $X$  als kompakt vorausgesetzt wird. Dort wird zwar mit Maßen aus  $M_1^+(\mathcal{L}_0(Y))$  gearbeitet; diese lassen sich aber eindeutig zu Elementen von  $\mathcal{M}_1^+(Y)$  fortsetzen. Die übrigen Versionen des Satzes in [HS] werden als Korollare zu 7.4 bewiesen.

c. Ist  $Y$  für  $\mu \in \tilde{\mathcal{F}}$  dem Maß nach metrisierbar, so ist nach Satz 5.8 das darstellende Maß aus 5.10 und damit auch dasjenige aus Korollar 5.11 **e i n d e u t i g** bestimmt.

### Drei Beispiele aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Integraldarstellung erlaubt es, "Fast-überall-Gesetze" für Produktmaße einfach und durchsichtig auf symmetrische Maße zu übertragen. Als Beispiel dafür sollen das starke Gesetz der großen Zahlen und der Satz vom iterierten Logarithmus dienen. Mit derselben Methode kann auch der zentrale Grenzwertsatz für symmetrische Maße bewiesen werden.

Dazu betrachten wir zunächst den Fall  $X := \mathbb{R}$ .

Bemerkung: In diesem Fall  $Y = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  gilt der Eindeutigkeitssatz 5.7. Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\xi_n$  die Projektion von  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  auf die  $n$ -te Komponente. Ist  $\mu \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  und  $f$  eine  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ -meßbare und integrierbare Funktion, so ist der Erwartungswert  $E_\mu(f) := \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f d\mu$  definiert. Ist  $\mu$  symmetrisch und existiert  $E_\mu(\xi_1)$ , so ist  $E_\mu(\xi_n) = E_\mu(\xi_1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Das folgende Lemma zeigt, daß sich die Existenz dieser Größe bei der Integraldarstellung auf fast alle Elemente von  $\tilde{\mathcal{P}}$  vererbt. Ferner wird die Gültigkeit der Darstellungsformel für alle nichtnegativen meßbaren Funktionen bewiesen.

#### 5.12 Lemma:

Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.4 erfüllt,  $\mu \in \mathcal{H}$  und  $f$  eine  $\mathcal{L}(Y)$ -meßbare,  $\mu$ -integrierbare Funktion auf  $Y$ . Ferner sei  $p \in \mathcal{M}_1^+(\mathcal{M}(\text{ExH}))$  mit  $\mu = R(p)$ . Dann ist

$$p(\{ \nu \in \text{ExH} : \int_Y f d\nu \text{ existiert} \}) = 1.$$

Ist  $f \geq 0$  und setzt man  $0 \cdot \infty := 0$ , so gilt weiter:

$$\int_Y f d\mu = \int_{\text{ExH}} \left( \int_Y f d\nu \right) dp.$$

Beweis:

Die Existenz von  $\int_Y f \, d\mu$  ist äquivalent zu der von  $\int_Y |f| \, d\mu$  und dies dazu, daß für die kuperten Funktionen

$f^n := \min(|f|, n)$  gilt:

$$\sup\{\int_Y f^n \, d\mu : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Es sei  $N := \{\nu \in \text{ExH} : \sup\{\int_Y f^n \, d\nu : n \in \mathbb{N}\} = \infty\}$ . Wäre  $p(N) > 0$ , so

$$\sup\{\int_Y f^n \, d\mu : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\int_{\text{ExH}} (\int_Y f^n \, d\nu) \, d\rho : n \in \mathbb{N}\} \geq \sup\{\int_N (\int_Y f^n \, d\nu) \, d\rho : n \in \mathbb{N}\} = \infty$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ferner ist für  $f \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_Y f \, d\mu &= \sup\{\int_Y f^n \, d\mu : n \in \mathbb{N}\} = \\ &= \sup\{\int_{\text{ExH}} (\int_Y f^n \, d\nu) \, d\rho : n \in \mathbb{N}\} = \int_{\text{ExH}} (\int_Y f \, d\nu) \, d\rho \end{aligned}$$

nach dem Satz von der monotonen Konvergenz.

□

Es sei

$$C := \{y \in \mathbb{R}^N : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i(y) \text{ existiert}\}$$

und  $Z := (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i) \chi_C$ .  $Z$  ist eine  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ -meßbare Funktion.

Wir sagen,  $\mu \in \mathcal{H}_1^+(\mathbb{R}^N)$  erfüllt das starke Gesetz der großen Zahlen, wenn

$$\mu(C) = \mu(\{y \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i(y) \longrightarrow Z(y)\}) = 1$$

ist.

Dieses Gesetz ist nach dem Satz von Chintchin-Kolmogorov für jedes Produktmaß  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{D}}$  mit existentem Erwartungswert  $E_{\tilde{\pi}}(\xi_1)$  erfüllt. Dieser besagt, daß

$$(5.1) \quad \tilde{\pi}(\{y \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i(y) \longrightarrow E_{\tilde{\pi}}(\xi_1)\}) = 1$$

ist. ([BA], §37).

Mit Hilfe der Integraldarstellung folgt daraus für symmetrische Maße:

### 5.13 Satz:

Jedes  $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}$  mit existentem Erwartungswert  $E_\mu(\xi_1)$  erfüllt das starke Gesetz der großen Zahlen.

Beweis:

Für jedes  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}}$  mit existentem  $E_{\tilde{\pi}}(\xi_1)$  ist nach (5.1)

$\tilde{\pi}(C) = 1$ . Repräsentiert  $p \in M_1^+(\mathcal{M})(\tilde{\mathcal{P}})$  das Maß  $\mu$  (vergleiche Satz 5.10), so ist nach 5.12  $p(\{\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}} : E_{\tilde{\pi}}(\xi_1) \text{ existiert}\}) = 1$ , und deshalb gilt:

$$\mu(C) = \int_{\{\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}} : E_{\tilde{\pi}}(\xi_1) \text{ existiert}\}} \tilde{\pi}(C) d p = 1$$

□

Weiter seien

$$C' := \{y \in \mathbb{R}^N : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i(y) - Z(y))^2 \text{ existiert in } \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\},$$

$$V := \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - Z)^2 \right)^{1/2} \cdot \chi_{C'}, \text{ und}$$

$$D := \{y \in \mathbb{R}^N : x_i = x_j \text{ für alle } i, j \in \mathbb{N}\}$$

die Diagonale von  $\mathbb{R}^N$ .

Dann gilt für die "Varianz"  $V^2$ :

### 5.14 Satz:

Ist  $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}$ , so daß  $E_\mu(\xi_1^2)$  existiert und  $\mu(D) = 0$  ist, dann existiert auch  $E_\mu(Z^2)$  und es gilt:

$$\mu(\{y \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i(y) - Z(y))^2 \rightarrow V^2(y) > 0\}) = 1.$$

Dem Beweis stellen wir ein einfaches Lemma voran:

### 5.15 Lemma:

Ist  $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}$  mit existentem  $E_{\mu}(\xi_1^2)$  und  $\mu(D) = 0$  und  $p \in M_1^+(\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{P}}))$  ein repräsentierendes Maß, so gilt für die Menge  $\tilde{\mathcal{P}}' := \{\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}} : \tilde{\pi}(D) = 0 \text{ und } E_{\tilde{\pi}}(\xi_1^2) \text{ existiert}\}$ , daß  $p(\tilde{\mathcal{P}}') = 1$  ist.

Beweis:

Aus  $\mu(D) = 0$  folgt mit der Darstellungsformel (2.3), daß  $p(\{\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}} : \tilde{\pi}(D) = 0\}) = 1$  ist. Mit Lemma 5.12 folgt aus der Existenz von  $E_{\mu}(\xi_1^2)$   $p(\{\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}} : E_{\tilde{\pi}}(\xi_1^2) \text{ existiert}\}) = 1$ .  $\tilde{\mathcal{P}}'$  ist also Durchschnitt von zwei Mengen des Maßes 1, und somit ist  $p(\tilde{\mathcal{P}}') = 1$ .

□

Beweis von Satz 5.14:

1. Nach (5.1) ist für alle  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}}'$

$$(*) \quad \tilde{\pi}(\{y \in \mathbb{R}^N : E_{\tilde{\pi}}(\xi_1) = Z(y)\}) = 1,$$

also

$$E_{\tilde{\pi}}(\xi_1)^2 = \int_Y Z^2 d\tilde{\pi}.$$

$p \in M_1^+(\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{P}}))$  sei ein  $\mu$  repräsentierendes Maß.

Mit Lemma 5.12, 5.15 und der allgemein richtigen Ungleichung

$$\int_Y \xi_1^2 d\tilde{\pi} \geq (\int_Y \xi_1 d\tilde{\pi})^2 \text{ gilt also:}$$

$$\begin{aligned} \int_Y \xi_1^2 d\mu &= \int_{\tilde{\mathcal{P}}'} (\int_Y \xi_1^2 d\tilde{\pi}) dp \geq \int_{\tilde{\mathcal{P}}'} E_{\tilde{\pi}}(\xi_1)^2 dp = \\ &= \int_{\tilde{\mathcal{P}}'} (\int_Y Z^2 d\tilde{\pi}) dp = \int_Y Z^2 d\mu. \end{aligned}$$

Aus der Existenz des ersten Integrals folgt somit auch die des letzten.

2. Für  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}}'$  gilt (\*). Deshalb gilt für die Folge  $(\eta_i : i \in \mathbb{N})$  mit  $\eta_i := (\xi_i - Z)^2 \chi_C$  nach [BA], §37 das starke Gesetz der großen Zahlen (denn es handelt sich dabei um eine Folge unabhängiger, identisch verteilter meßbarer Funktionen, für die wegen 1. der Erwartungswert  $E_{\tilde{\pi}}(\eta_1) = E_{\tilde{\pi}}((\xi_1 - E_{\tilde{\pi}}(\xi_1))^2)$  existiert), d.h. es ist  $\tilde{\pi}(C') = 1$ . Mit Lemma 5.15 gilt:

$$\mu(C') = \int_{\tilde{\mathcal{P}}'} \tilde{\pi}(C') \, d\mu = 1.$$

□

Es sei

$$C'' := \{y \in C' : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_1(y) - nZ(y)}{\sqrt{2n \log \log n} V(y)} = 1\}.$$

Wir sagen, für  $\mu \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  gilt der Satz vom iterierten Logarithmus, wenn  $\mu(C'') = 1$  ist.

Er gilt nach dem Satz von Hartmann-Wintner (vgl. [RE], 2.8.) für alle Produktmaße  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}}$ , für welche  $E_{\tilde{\pi}}(\xi_1^2)$  existiert und die Streuung  $\sigma_{\tilde{\pi}} := \sqrt{E_{\tilde{\pi}}((\xi_1 - E_{\tilde{\pi}}(\xi_1))^2)} > 0$  ist. Dieser Satz lautet:

$$(5.2) \quad \tilde{\pi}(\{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_1(y) - nE_{\tilde{\pi}}(\xi_1)}{\sqrt{2n \log \log n} \sigma_{\tilde{\pi}}} = 1\}) = 1.$$

Der entsprechende Satz für symmetrische Maße hat die Form:

#### 5.16 Satz:

Für  $\mu \in \tilde{\mathcal{F}}$  mit existentem  $E_{\mu}(\xi_1^2)$  und  $\mu(D) = 0$  gilt der Satz vom iterierten Logarithmus.

Beweis:

Wieder repräsentiere  $p \in M_1^+(\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{P}}))$  das Maß  $\mu$ . Nach Lemma 5.15 ist  $p(\tilde{\mathcal{P}}') = 1$ . Für jedes  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}}'$  ist  $\sigma_{\tilde{\pi}} > 0$ . Daher gilt dafür

der Satz von Hartmann-Wintner (5.2), also  $\tilde{\pi}(C'') = 1$ . Mit (2.3) gilt

$$\mu(C'') = \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \tilde{\pi}(C'') \, d\mu = 1.$$

□

Bemerkung: Révész beweist für  $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}$  mit existentem  $E_{\mu}(\xi_1^2)$ :

$$\mu(C'' | V > 0) = 1.$$

Die hier angegebene Bedingung  $\mu(D) = 0$  ist schwächer, weil  $V$  auf  $D$  verschwindet.

Durch die Verwendung der Integraldarstellung vereinfacht sich der Beweis erheblich.

Für  $(\xi_n : n \in \mathbb{N})$  ist die Folge der standardisierten Variablen  $S_n$  definiert:

$$S_n(y) := \frac{1}{\sqrt{n} \, v(y)} \sum_{i=1}^n (\xi_i(y) - z(y))$$

für alle  $y \in \mathbb{R}^N$ , für welche alle vorkommenden Größen definiert sind, und gleich 0 sonst. Für  $\mu \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}^N)$  gilt der zentrale Grenzwertsatz, wenn die Folge  $\mu \cdot S_n^{-1}$  der Verteilungen der standardisierten Variablen schwach gegen die standardisierte Normalverteilung  $\nu_{0,1}$  konvergiert ([BA], §51).

Wieder ist dieser Satz für alle  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}}$  mit existentem  $E_{\tilde{\pi}}(\xi_1^2)$  und  $\tilde{\pi}(D) > 0$  richtig.

### 5.17 Satz:

Für  $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}$  mit existentem  $E_{\mu}(\xi_1^2)$  und  $\mu(D) = 0$  gilt der zentrale Grenzwertsatz.

Beweis:

$p \in M_1^+(\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{P}}))$  repräsentiere  $\mu$ . Es ist  $p(\tilde{\mathcal{P}}') = 1$  nach Lemma 5.15, und der Satz gilt für alle  $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{P}}'$ . Somit hat man für jedes  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \cdot S_n^{-1} = \int_{\mathbb{R}^N} f \cdot S_n \, d\mu = \int_{\tilde{\mathcal{P}}'} (\int_{\mathbb{R}^N} f \cdot S_n \, d\tilde{\pi}) dp \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\nu_{0,1}.$$

□

Bemerkung: Die Beispiele wurden gewählt, weil sie für die Wahrscheinlichkeitstheorie wichtig und außerdem leicht zu formulieren sind.

Die Anwendbarkeit der Integraldarstellung hängt nicht wesentlich von der Voraussetzung  $X = \mathbb{R}ab$ . So läßt sich etwa das starke Gesetz der großen Zahlen für Variablen mit Werten in einem Banachraum (vgl. [RE], Satz 9.22) genauso behandeln. Wegen der Allgemeinheit von Satz 5.4 ist auch die Metrisierbarkeit von  $X$  nicht wesentlich. Es genügt, daß die Sätze für Produktmaße bzw. für genügend viele Produktmaße zur Verfügung stehen. Liegt Metrisierbarkeit vor, können diese Sätze bereits mit dem Ergebnis aus [WZ] erhalten werden.

# Symbolverzeichnis

|   |                                    |      |   |                                        |    |
|---|------------------------------------|------|---|----------------------------------------|----|
| A | $A \cap \mathcal{C}$               | S. 6 | I | $\mathcal{F}_\mu$                      | 64 |
| B | $B_\mathcal{C}, B_\mathcal{F}$     | 6, 7 | J | $\iota$                                | 29 |
|   | $B_f(K)$                           | 9    | K | K                                      | 8  |
|   | $\mathcal{B}(Y), \mathcal{B}_0(Y)$ | 7    | M | $\mu(f)$                               | 15 |
|   | $\mathcal{B}(M)$                   | 16   |   | $R \cdot M_1, M_1 + M_2$               | 6  |
|   | $\mathcal{L}(Y), \mathcal{L}_0(Y)$ | 7    |   | $M^+(\mathcal{L}), M_1^+(\mathcal{L})$ | 7  |
|   | $\mathcal{L}_1$                    | 6    |   | $\mathcal{M}^+(Y), \mathcal{M}_1^+(Y)$ | 7  |
| C | $\mathcal{C}(Y), \mathcal{C}_b(Y)$ | 7    |   | $\mathcal{M}(Y)$                       | 16 |
|   | $\chi_A$                           | 6    |   | $\mathcal{M}^R(H)$                     | 56 |
| D | D                                  | 72   |   | $M_H^+(\mathcal{M}(H))$                | 27 |
| E | ExM                                | 6    |   | $\mathcal{M}_B^{\mathcal{Q}}(Y)$       | 24 |
|   | E'                                 | 8    | N | $\mathbf{N}$                           | 6  |
|   | $E_\mu(f)$                         | 70   | P | $p^*$                                  | 22 |
|   | $\mathcal{E}$                      | 63   |   | $\mathcal{P}(X)$                       | 6  |
|   | $\mathcal{E}_x$                    | 7    |   | $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1$           | 63 |
| F | $f A, \mathcal{F} A$               | 6    |   | $\tilde{\pi}, \tilde{\mathcal{P}}$     | 67 |
|   | $f'$                               | 15   |   | $\varphi$                              | 35 |
|   | $\overline{f}$                     | 9    |   | $\Phi$                                 | 12 |
| H | H                                  | 17   | R | $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$             | 6  |
|   | $H_0$                              | 24   |   | $r(p)$                                 | 8  |
|   | $H_1$                              | 29   |   | $R(p)$                                 | 16 |

|   |                                               |        |
|---|-----------------------------------------------|--------|
| S | $\mathcal{C}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{C}(Y))$ | 16     |
|   | $\mathcal{C}_{\pi}$                           | 74     |
|   | $\mathcal{C}$                                 | 8      |
|   | $\tilde{\mathcal{C}}$                         | 67     |
| T | $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$                   | 67, 68 |
| V | $V, V^2$                                      | 72     |
|   | $ND(M)$                                       | 15     |
| W | $ND_p$                                        | 39     |
|   | $ND(M)$                                       | 15     |
| Y | $(Y, \mathcal{F})$                            | 7      |
|   | $(Y_2, \mathcal{F}_2)$                        | 29     |
|   | $Y_1$                                         | 29     |
|   | $\nu(M, \mathcal{F}(Y))$                      | 15     |
| Z | $Z$                                           | 71     |

---

|                           |    |
|---------------------------|----|
| $<$                       | 8  |
| $<^{\circ}$               | 16 |
| $\leftarrow$              | 10 |
| $\Delta$                  | 54 |
| $\bigvee$                 | 16 |
| $[x, y]_{\mathbb{R}^+ M}$ | 10 |
| $[0, p]_{\leq}$           | 11 |

---

Stichwortverzeichnis

|                            |       |                            |      |
|----------------------------|-------|----------------------------|------|
| A                          |       | F                          |      |
| äußeres Maß                | S. 22 | Funktion                   | 6    |
| affine Funktion            | 13    |                            |      |
| Auswertungsfunktional      | 15    | G                          |      |
|                            |       | gleichmäßig straff         | 57   |
| B                          |       | H                          |      |
| Bairemeßbar                | 7     | Hilbertwürfel              | 41   |
| Bairesche Menge            | 7     |                            |      |
| Basis                      | 10    | I                          |      |
| beschränkt                 | 15    | Initial- $\sigma$ -Algebra | 7    |
| Borelmeßbar                | 7     | invariant                  | 63   |
| Borelsche Menge            | 7     |                            |      |
| D                          |       | K                          |      |
| Diagonale                  | 72    | klassische Situation       | 8    |
|                            |       | konkav                     | 9    |
| E                          |       | konservativ                | 63   |
| eigene Halbordnung         | 10    | kontraktiv                 | 63   |
| ergodisch                  | 63    | konvex                     | 6, 8 |
| Erwartungswert             | 70    | konvexer Kegel             | 10   |
| erzeugte $\sigma$ -Algebra | 6, 7  |                            |      |
| expansiv                   | 63    |                            |      |
| Extremalpunkt              | 6     |                            |      |

|                           |       |                           |        |
|---------------------------|-------|---------------------------|--------|
| <b>M</b>                  |       | Rieszscher Darstellungs-  | 16     |
| $\mu$ -metrisierbar       | 40    | satz                      |        |
| $\mu$ -invariant          | 64    | Rieszsche Zerlegungs-     | 11     |
| Maß                       | 7     | eigenschaft               |        |
| maßkonvex                 | 56    |                           |        |
| dem Maß nach metrisierbar | 40    |                           |        |
| <b>N</b>                  |       | S                         |        |
| natürliche Halbordnung    | 10    | $\zeta$ -Isomorphismus    | 68     |
| normiertes Maß            | 7     | Satz vom iterierten       | 74     |
|                           |       | Logarithmus               |        |
|                           |       | Satz von                  |        |
|                           |       | ~ Choquet-Meyer-Bishop-   | 10     |
|                           |       | de Leeuw                  |        |
|                           |       | ~ de Finetti              | 69     |
|                           |       | ~ Loomis                  | 10     |
|                           |       | schwache Topologie        | 15, 16 |
|                           |       | schwach*-Topologie        | 17     |
|                           |       | Simplex                   | 14     |
|                           |       | standardisierte Variablen | 75     |
|                           |       | starkes Gesetz der großen | 71     |
|                           |       | Zahlen                    |        |
|                           |       | straff                    | 7      |
|                           |       | Streuung                  | 74     |
|                           |       | Summentopologie           | 30     |
|                           |       | symmetrisch               | 67     |
| <b>P</b>                  |       |                           |        |
| p-meßbar                  | 37    |                           |        |
| p-Vervollständigung       | 37    |                           |        |
| positive Diffusion        | 63    |                           |        |
| Prohorov-Raum             | 57    |                           |        |
| <b>R</b>                  |       |                           |        |
| Randmenge                 | 9     |                           |        |
| repräsentieren            | 8, 16 |                           |        |
| Resultante                | 8, 16 |                           |        |
|                           |       | T                         |        |
|                           |       | $\tau$ -stetig            | 19     |

|                         |    |
|-------------------------|----|
| U                       |    |
| universell meßbar       | 39 |
| V                       |    |
| Varianz                 | 72 |
| Verbandseigenschaft     | 12 |
| Vervollständigung       | 37 |
| Z                       |    |
| Zentraler Grenzwertsatz | 75 |

Literaturverzeichnis

- AL Alfsen, E.M.: Compact convex sets and boundary integrals. Berlin usw.: Springer 1971.
- BA Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1966.
- BE Berberian, S.K.: Measure and integration. New York: Chelsea Publishing Company 1965.
- BG Blumenthal, R.M., Gettoor, R.K.: Markov processes and potential theory. New York: Academic Press 1968.
- CH Choquet, G.: Lectures on analysis. New York: W.A. Benjamin, Inc., 1969.
- DS Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear operators. Part I. New York: Interscience Publishers, Inc., 1967.
- DU Dugundji, J.: Topology. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- ED Edgar, G.A.: A noncompact Choquet theorem. Proc. of the Am. Math. Soc. 49 (1975), 354-358.
- HJ Hoffmann-Jørgensen, J.: The theory of analytic spaces. Aarhus: Math. Inst. 1970 (Various publication series 10).
- HS Hewitt, E., Savage, L.: Symmetric measures on Cartesian products. Trans. Am. Math. Soc. 80 (1955), 470-501.
- LO Loomis, L.H.: Unique decompositions on convex sets. Am. J. of Math. 84 (1962), 509-526.

- ME Meyer, P.A.: Progrès récents dans la théorie des cônes convexes à base compact. Sem. de Th. Pot., 8e année, 1..
- PH Phelps, R.R.: Lectures on Choquet's theorem.  
New York: Van Nostrand u.a. 1966.
- RE Révész, P.: Die Gesetze der großen Zahlen.  
Basel, Stuttgart: Birkhäuser 1968.
- RI Richter, H.: Eine einfache Axiomatik der subjektiven Wahrscheinlichkeit. Istitutio Nazionale di Alta Matematica, Symposia Mathematica Vol.IX (1972).
- TO1 Topsøe, F.: Topology and measure. Berlin: Springer 1970.
- TO2 " : Compactness and tightness in a space of measures with the topology of weak convergence.  
Math. Scand. 34 (1974), 187-210.
- WZ Weizsäcker, H.v.: Der Satz von Choquet für konvexe nicht kompakte Mengen straffer Maße über beliebigen Grundräumen. Math. Z. 142 (1975), 161-165.
-

## Lebenslauf

Geburtsdatum: 30.11.1946

Geburtsort: Ansbach

Schulbildung: Vom Herbst 1953 bis zum Spätsommer 1957 Volksschule in München, anschließend Gymnasium in München, Abitur im Juli 1966 am Erasmus-Grasser-Gymnasium.

Studium: Vom Wintersemester 1968 bis zum Sommersemester 1973 Mathematikstudium an der Universität München. Anschließend Promotionsstudium bis Ende 1974.

Vorlesungen vor allem bei den Professoren Wienholtz und Richter.

Abschlußprüfungen: Diplomhauptprüfung für Mathematik, 5. Juni 1973.

Berufliche Tätigkeiten: Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität München seit 1. Januar 1975.



